

# 基于非线性弥散关系的缓坡方程波浪传播变形模拟研究<sup>\*</sup>

## Modeling of Wave Propagation and Transformation by the Mild-slope Equation with Nonlinear Dispersion

江森汇<sup>1</sup>, 舒颢俊<sup>2</sup>, 侯 棚<sup>3</sup>

JIANG Sen-hui<sup>1</sup>, SHU Xie-jun<sup>2</sup>, HOU Peng<sup>3</sup>

(1. 热带海洋环境国家重点实验室, 中国科学院南海海洋研究所, 广东广州 510301; 2. 国家海洋局南海海洋工程勘察与环境研究院, 广东广州 510300; 3. 珠江水利委员会珠江水利科学研究院, 广东广州 510611)

(1. State Key Laboratory of Tropical Oceanography, SCSIO, CAS, Guangzhou, Guangdong, 510301, China; 2. South China Sea Marine Engineering and Environment Institute, SOA, Guangzhou, Guangdong, 510300, China; 3. Pearl River Hydraulic Research Institute, PRWRC-MWR, Guangzhou, Guangdong, 510611, China)

**摘要:**【目的】波浪由外海传播到近海时, 由于受到地形、建筑物等影响, 波浪非线性增强, 线性弥散关系不能够很好的描述波浪弱非线性效应。为了对比研究非线性弥散关系的缓坡方程在波浪传播变形的作用。【方法】采用改进型缓坡方程数值模式, 并结合 Li 提出的非线性弥散关系, 对 Berkhoff 椭圆经典地形进行波浪传播变形模拟研究, 探讨线性和非线性弥散关系的数值模拟计算结果与实验值的关系, 并对两种计算结果进行了比较分析。【结果】非线性弥散关系的计算结果与实验值的误差较线性弥散关系的结果小, 非线性模型要优于线性模型。【结论】非线性模型更适合近海海域弱非线性波浪传播变形的研究。

**关键词:**缓坡方程 非线性 弥散关系 波浪变形 Berkhoff 地形

**中图分类号:** P731.22 **文献标识码:** A **文章编号:** 1002-7378(2014)03-0148-04

**Abstract:**【Objective】As surface waves propagate from deep to shallow water, the nonlinearity of waves would be strengthened due to the effect of topography and various hydraulic structures, which can't be described well with the linear dispersion relations. The objective of this article is to investigate the effects of the nonlinear dispersion relation. 【Methods】In the paper, we attempted to solve this problem by the mild-slope equation with nonlinear dispersion, which will be used to simulate wave propagation and transformation on Berkhoff topography. 【Results】The computational results between linear and nonlinear dispersion are presented. The results of nonlinear dispersion agree with the actual measure data, which is better than that of the linear dispersion. 【Conclusion】It illustrates that the nonlinear model is suitable for studying the wave transformation with weak nonlinearity in offshore area.

**Key words:** mild-slope equation, nonlinearity, wave dispersion, wave transformation, Berkhoff experiment

收稿日期: 2014-04-10

作者简介: 江森汇 (1983-), 男, 博士, 主要从事物理海洋学研究。

\* 广西自然科学基金北部湾重大专项 (2011GXNSFE018002, 2012GXNSFEA053001) 资助。

【研究意义】随着滨海海洋经济的大力发展, 许多大型的近海工程项目 (如围填海、港口工程等) 开工建设, 改变了原有海岸线, 进而影响近海海域潮流、波浪等海洋动力要素, 导致泥沙的运移和近海海

洋生态结构的变化<sup>[1~7]</sup>。波浪由外海传播至近海时,由于受到地形、建筑物等影响,将发生折射、绕射、反射、浅水变形、破碎等现象,由此引起波浪的传播速度、波长、波高、流场和压力场等变化<sup>[8,9]</sup>。波浪传播变形是近岸波浪的显著特征之一,对此现象的研究具有较大的理论意义和实用价值。【前人研究进展】自 Berkhoff<sup>[10]</sup>(1972)根据势波理论采用小参数展开法推导出缓坡方程以来,通过把缓坡方程与特定的边界条件结合,求解弱非线性影响下的波浪场(包括波浪的折射、绕射、浅水变形等),已被广泛应用于近岸海域的波浪场计算。目前,很多研究人员在考虑各种动力机制的情况下简化和改进了缓坡方程,并给出了一批拓展型缓坡方程<sup>[11~14]</sup>。传统缓坡方程采用线性弥散关系,不足以描述深水变浅等因素引起的弱非线性现象,对方程所采用的弥散关系进行改进就显得尤为重要,如 Kirby 等<sup>[15]</sup>、Hedges<sup>[16]</sup>和 Li 等<sup>[17,18]</sup>都提出了各自的非线性弥散关系,为缓坡方程的进一步发展和应用奠定了基础。相较于其他学者提出的波浪非线性弥散关系, Li<sup>[17,18]</sup>给出的波浪非线性弥散关系更加精确、合理。【本研究切入点】结合 Li 等<sup>[17,18]</sup>提出的非线性弥散关系,以椭圆型缓坡方程为控制方程,对 Berkhoff 等<sup>[19]</sup>经典理论地形进行模拟计算。【拟解决的关键问题】对比分析线性弥散关系和非线性弥散关系的模拟结果,阐明两者的优劣性,为下一步的应用研究提供参考依据。

## 1 模型理论基础

### 1.1 控制方程

Massel<sup>[20]</sup>(1995)在 Berkhoff 提出的传统缓坡方程的基础上,推导出包含底坡及底坡曲率影响项的缓坡方程,其形式为:

$$\nabla(CC_g \nabla \varphi) + k^2 CC_g \varphi + (f_1 g \nabla^2 h + f_2 g k (\nabla h)^2) \varphi = 0. \quad (1)$$

Massel 在推导过程中忽略了底摩阻和波浪破碎能量耗散项等。在方程式(1)的基础上,考虑底摩阻和波浪破碎能量耗散项,得到改进的缓坡方程,即为本文所采用的控制方程:

$$\nabla(CC_g \nabla \varphi) + k^2 CC_g (1 + if) \varphi + (f_1 g \nabla^2 h + f_2 g k (\nabla h)^2) \varphi = 0. \quad (2)$$

式中:  $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y)$  为水平梯度算子;  $C$  为波浪传播的相速度;  $C_g$  为波浪群速度;  $\varphi$  为波浪速度势;  $k$  为波数;  $h$  为水深(m);  $g$  为重力加速度;  $f_1$ 、 $f_2$  由式(3)和式(4)给出;  $f = f_b + f_a$  为综合能量耗散项;

$f_b$  为底摩阻能量耗散系数;  $f_a$  为波浪破碎能量耗散系数,分别由式(5)和式(6)确定;  $i = \sqrt{-1}$ 。

$$f_1 = \frac{sh 2kh - 2khch 2kh}{4ch^2 kh (2kh + sh 2kh)}, \quad (3)$$

$$f_2 = \{ \sec h^2 kh [12 - 12k^2 h^2 + 32k^4 h^4 + (3 + 48k^2 h^2) ch 2k - 12(1 - k^2 h^2) ch 4kh - 3ch 6kh - 18k h sh 2kh + 64k^3 h^3 sh 2kh + 24kh sh 4kh + 6k h sh 6kh] \} / [24(2kh + sh 2kh)^3] + \frac{2ih^2 kh}{2kh + sh 2kh}, \quad (4)$$

$$f_b = \frac{4C_f a \omega^2}{3\pi ng} \frac{1}{sh^3 kh}, \quad (5)$$

$$f_a = \frac{K_2}{kh} \left(1 - \frac{K_1^2}{4\gamma_a^2}\right). \quad (6)$$

其中,  $C_f$  为摩擦系数;  $a$  为振幅(m);  $\omega$  为角频率;  $n = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2kh}{sh 2kh}\right)$ ;  $K_1 = 0.4$ ;  $K_2 = 0.15$ ;  $\gamma_a = a/h$ 。

Li 等<sup>[17,18]</sup>推导给出的非线性弥散关系如式(7)所示:

$$\omega^2 = gk(1 + p\epsilon^2) \tanh(kh + q\epsilon). \quad (7)$$

式中:  $p = \tanh(kh)$ ;  $q = \left[\frac{kh}{\sinh(kh)}\right]^2$ ;  $\epsilon = ka$  为波陡。当  $p, q$  同时为 0 时,上式退化为线性弥散关系,  $\omega^2 = gk \tanh(kh)$ 。

### 1.2 边界条件

#### (1) 辐射边界条件

在本文的数学模型中,根据边界处的特性,将边界划分为完全吸收边界、部分吸收边界和全反射边界。边界条件如式(8)和(9)所示,3种边界条件的不同之处在于式中参数  $\alpha$  的取值。

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \pm i\alpha k \left(\varphi + \frac{1}{2k^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}\right), \text{ 在 } \pm x \text{ 边界上。} \quad (8)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \pm i\alpha k \left(\varphi + \frac{1}{2k^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\right), \text{ 在 } \pm y \text{ 边界上。} \quad (9)$$

式中:  $\alpha = (1-R)/(1+R)$ ;  $R$  为边界处的反射系数。当  $\alpha = 1$ , 即  $R = 0$  时,表示边界为完全吸收边界;当  $\alpha = 0$ , 即  $R = 1$  时,表示边界为全反射边界;当  $0 < \alpha < 1$ , 即  $0 < R < 1$  时,表示边界为部分吸收边界。式(8)为垂直于  $x$  轴的边界,有水网络在其左侧时取正号;式(9)为垂直于  $x$  轴的边界,有水网络在其下侧时取正号。

#### (2) 入射边界条件

由于在入射边界上,可能存在由计算海域产生的散射波浪,所以入射边界处的实际速度势函数是

未知的。在入射边界上存在两种波浪速度势：一为入射波浪要素的速度势；另外是穿越入射边界的散射波浪速度势。入射边界条件为：

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \pm ik(\varphi + \frac{1}{2k^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}) + 2ik\varphi^s, \text{ 在 } \pm x \text{ 边界上。} \quad (10)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \pm ik(\varphi + \frac{1}{2k^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}) + 2ik\varphi^s, \text{ 在 } \pm y \text{ 边界上。} \quad (11)$$

其中散射波浪速度势  $\varphi^s$  可由式(12)确定：

$$\varphi^s = Ae^{iS} = \frac{igTH}{4\pi} e^{iS} \quad (12)$$

式中： $H$ 为入射波高； $T$ 为周期； $A$ 为振幅函数； $S$ 为相位函数。

通常情况下，在入射边界上，入射波浪的相位应该相同。为方便计算，一般在上述入射边界条件中，取  $S=0$ 。但对于斜向入射的波浪而言，相位函数可采用式(13)进行计算：

$$S(x_L) = \frac{2\pi x_L \sin \theta}{L}, 0 \leq S(x_L) \leq 2\pi \quad (13)$$

式中： $x_L$ 为一维坐标； $\theta$ 为入射波向与边界法向的夹角。

### 1.3 求解方法

在数值模拟过程中，采用具有二阶精度的五点式中心差分将控制方程和边界条件进行离散，再利用控制方程与边界条件的有限差分格式建立带状矩阵方程，并采用具有节约型带状矩阵解法功能的高斯消去法(GEP法)在PC机上直接求解椭圆型缓坡方程<sup>[21]</sup>。

## 2 结果验证与分析

为了观察数学模型的适用性和模拟结果的精度，分别采用线性弥散关系和非线性弥散关系对Berkhoff<sup>[19]</sup>的椭圆地形进行数值模拟验证，分析两种波浪弥散关系在理论地形中的优劣性。

Berkhoff椭圆具体水下地形和实测断面布置如图1所示。计算条件情况与原始实验相同，范围为25m×20m，入射波高  $H_0$  为0.0464m，入射波周期  $T$  为1.0s，入射方向为沿  $+x$  方向； $x$ 、 $y$  方向步长分别取0.05m和0.1m；其它3边边界采用完全吸收边界；斜线为等深线，其上的数值为水深；实测断面1~5是垂直于  $x$  轴，长度位置均为5~15m，断面6~8平行于  $x$  轴，长度位置为10~21m。

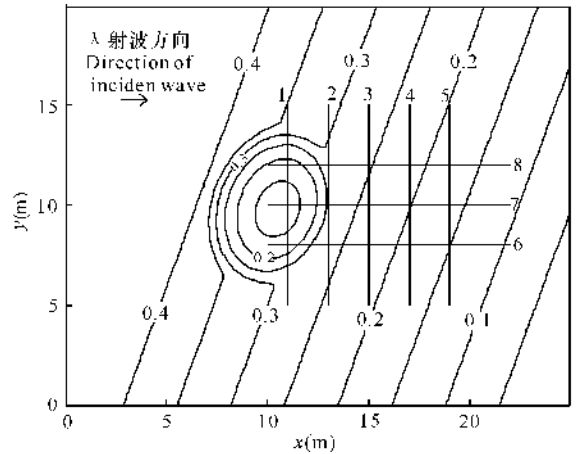


图1 水下地形和实测断面布置

Fig.1 Topography and measurement sections

图2分别给出了断面1~8的相对波高 ( $H/H_0$ ) 实验值、线性弥散关系的数值模拟计算值和非线性弥散关系数值模拟计算值的比较图。从图2可以看出，不论是采用线性弥散关系，还是非线性弥散关系，数值模拟的计算结果与实验值的吻合程度均较高，且两者的趋势较为一致，仅在某些局部的

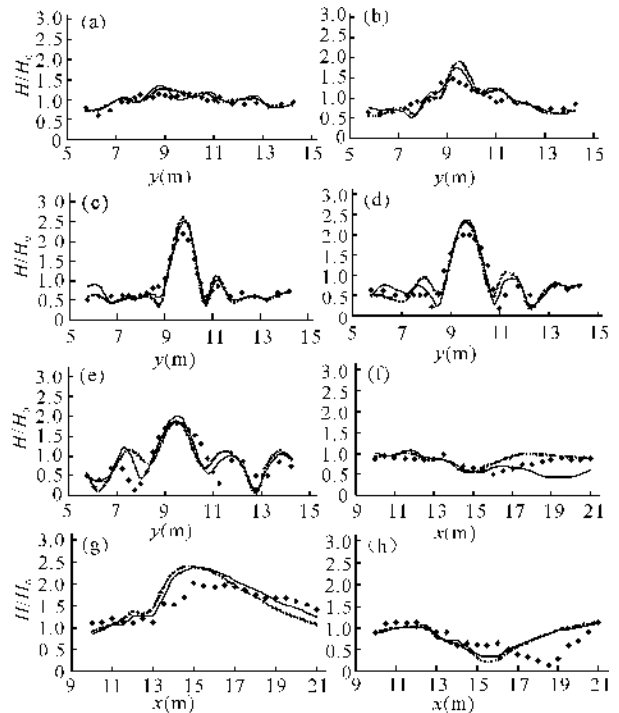


图2 各断面相对波高对比

Fig.2 Comparison of the relative wave height for Sec. 1 to Sec. 8

(a)断面1;(b)断面2;(c)断面3;(d)断面4;(e)断面5;(f)断面6;(g)断面7;(h)断面8。

(a)Section 1;(b)Section 2;(c)Section 3;(d)Section 4;(e)Section 5;(f)Section 6;(g)Section 7;(h)Section 8。

◆:实验值;----:线性值;——:非线性值。

◆:Experimental values;----:Linear values;——:Nonlinear values.

细节上有所不同,表明该缓坡数值模式能够较好的反映波浪在传播过程中的折射和绕射及浅水变形效应等。各断面对两种弥散关系的优劣性分析如下:

1)断面1处在椭圆中心背面,最靠近椭圆中心,受底地形的影响,其波高比相对其他断面最小,线性值更贴于实验值,而非线性值具有振荡的趋势,该趋势较线性值更显著;2)断面2和断面3的非线性值的峰值较线性值小,尤其断面2的非线性值的峰值前移,更接近实验值,断面3的非线性值在9m左右拐点上升,与实验值趋势一致,而线性值则偏离实验值较大;3)断面4和断面5在7~9m和11m处拐点下降较明显,减少了与实验值之间的距离,趋势也更加一致,断面6的非线性值在后半段变小,有点偏离实验值,可能与断面6后面的反射有关;4)断面7的非线性值在前半段较线性值小,后半段较线性值大,更贴合实验值;5)断面8的非线性值在中段抬高,更接近实验值。尽管在个别断面上有点误差,还有变差趋势,但可以肯定的是,采用非线性弥散关系的模拟计算结果与实验值的误差较线性弥散关系的结果更小,更准确。从整体上看,结合非线性弥散关系的缓坡方程模型能较好的模拟波浪在 Berkhoff 地形上的传播变形,与实验值的贴合程度要优于线性弥散关系,其对波浪非线性效应的刻画能力更强,更加适合于近海海区弱非线性波浪传播变形的模拟和研究。

### 3 结论

以改进型缓坡方程为控制方程,并结合 Li 等<sup>[17,18]</sup>的非线性弥散关系,对 Berkhoff 椭圆地形进行波浪模拟,对比分析了线性和非线性弥散关系的数值模拟计算结果与实验值的关系,并对两种数值模拟结果进行了比较。从模拟的结果可得到以下结论:非线性弥散关系模拟得到的计算结果较线性弥散关系模拟得到的计算结果在量值上和趋势上更符合实验值,精度更高;非线性模型要优于线性模型,对波浪非线性效应的刻画能力更强,适合于近海海区弱非线性波浪传播变形的模拟和研究。

#### 参考文献:

[1] 韩树宗,吴柳,朱君. 围填海对天津近海水动力环境的影响研究[J]. 中国海洋大学学报,2012,42(Sup.): 1-9.  
Han S Z, Wu L, Zhu J. The Research of Reclamation to Tianjin Coastal Hydrodynamic Environment[J]. Periodical of Ocean University of China,2012,42(Sup):

1-9.  
[2] 赵鑫,孙群,魏皓. 围填海工程对渤海湾风浪场的影响[J]. 海洋科学,2013,37(1):7-16.  
Zhao X, Sun Q, Wei H. Effects of coastal reclamation on the wave fields in the Bohai Bay[J]. Marine Sciences,2013,37(1):7-16.  
[3] 陈波. 廉州湾水流动力场对北海港域泥沙运移的影响[J]. 广西科学,1999,6(2):85-88.  
Chen B. Influence of water current dynamic field in Liangzhou Bay on sediment movements in Beihai Harbor area[J]. Guangxi Sciences,1999,6(2):85-88.  
[4] 陈波,邱绍芳. 北仑河口河道冲刷的动力背景[J]. 广西科学,1999,6(4):317-320.  
Chen B, Qiu S F. Dynamics background of riverbed erosion in the Beilunhe estuary[J]. Guangxi Sciences,1999,6(4):317-320.  
[5] 蒋磊明,陈波,邱绍芳. 廉州湾三角洲泥沙运移与海洋动力条件的关系[J]. 广西科学院学报,2008,24(1):1-3.  
Jiang L M, Chen B, Qiu S F. The relationship of silt transportation and ocean dynamical condition in delta of Lianzhou Bay[J]. Journal of Guangxi Academy of Sciences,2008,24(1):1-3.  
[6] 蒋磊明,陈波,邱绍芳. 围填海工程对防城港湾及其周边水动力条件环境变化的影响分析[J]. 广西科学院学报,2009,25(2):116-118.  
Jiang L M, Chen B, Qiu S F. Analysis on the effect of coast reclamation works on hydraulic environment variation in Fangchenggang Bay and neighborhood[J]. Journal of Guangxi Academy of Sciences,2009,25(2):116-118.  
[7] 韩姝怡,陈波,邱绍芳,等. 北仑河口北侧海岸环境演变与水动力学之间的关系[J]. 广西科学,2009,16(2):196-199.  
Han S Y, Chen B, Qiu S F, et al. Relationship between coastal environment evolution and hydrodynamic in the north of Beilunhe Estuary[J]. Guangxi Sciences,2009,16(2):196-199.  
[8] 文圣常,余宙文. 海浪理论与计算原理[M]. 北京:科学出版社,1984.  
Wen S C, Yu Z W. Theory and computational principle of water waves[M]. Beijing: Science Press,1984.  
[9] 祝会兵,于颖. 波浪在浅水中运动及破碎的数值研究[J]. 广西科学,2002,9(3):198-201,206.  
Zhu H b, Yu Y. Numerical modeling of wave running and breaking in shallow water[J]. Guangxi Sciences,2002,9(3):198-201,206.  
[10] Berkhoff J C W. Computation of combined refraction-diffraction[C]. In Proc 13th Int Conf on Coastal Engineering. Vancouver: ASCE,1972:471-490.  
[11] Kirby J T. A note on linear surface wave-current interaction over slowly varying topography[J]. J Geophys Re,1984,89(C1):745-745.

- 现状[J]. 淡水渔业, 1999, 29(12): 35-38.
- Ling Q F, Wu J W, Yang C G, et al. Current status fishery in small-and middle-size lakes in Suzhou area [J]. Freshwater Fisheries, 1999, 29(12): 35-38.
- [2] 范成新, 羊向东, 史龙新, 等. 江苏湖泊富营养化特征、成因及解决途径[J]. 长江流域资源与环境, 2005, 14(2): 218-222.
- Fan C X, Yang X D, Shi L X, et al. Characteristic and cause of lake eutrophication in Jiangsu province with suggestions on its control measures[J]. Resources and Environment in the Yangtze Basin, 2005, 14(2): 218-222.
- [3] 龚春生, 姚琪, 赵棣华, 等. 浅水湖泊平面二维水流-水质-底泥污染研究[J]. 水科学进展, 2006, 17(4): 496-501.
- Gong C S, Yao Q, Zhao D H, et al. Plane 2D flow-water quality-sediment pollution couple model in shallow lake [J]. Advances in Water Science, 2006, 17(4): 496-501.
- [4] 刘培桐. 环境学概论[M]. 北京: 高等教育出版社, 2003.
- Liu P T. Introduction of environmental[M]. Beijing: Higher Education Press, 2003.
- [5] 舒金华. 我国湖泊富营养化程度评价方法的探讨[J]. 环境污染与防治, 1990, 12(5): 2-7.
- Shu J H. The Assessment methodology for eutrophication of lakes in China[J]. Environmental Pollution & Control, 1990, 12(5): 2-7.
- [6] 杨晓华, 杨志峰, 郦建强, 等. 水环境质量综合评价的多目标决策-理想区间法[J]. 水科学进展, 2004, 15(2): 202-205.
- Yang X H, Yang Z F, Li J Q, et al. Multiple objective decision making-ideal interval method for comprehensive assessment of water environmental quality [J]. Advances in Water Science, 2004, 15(2): 202-205.
- [7] 李丽和, 周小宁, 韦丽群, 等. 南宁市南湖水质富营养化评价[J]. 广西科学院学报, 2012, 28(3): 219-223.
- Li L H, Zhou X N, Wei L Q, et al. Eutrophication evaluation of water quality in Nanning Nanhu Lake [J]. Journal of Guangxi Academy of Sciences, 2012, 28(3): 219-223.
- [8] 白海强, 吕保玉. 广西河流型湖泊和水库的水质富营养化评价[J]. 广西科学院学报, 2012, 28(4): 330-332.
- Bai H Q, Lv B Y. Eutrophication assessment of river-type lakes and reservirs in Guangxi [J]. Journal of Guangxi Academy of Sciences, 2012, 28(4): 330-332.
- [9] 黄欢, 汪小泉, 韦肖杭, 等. 杭嘉湖地区淡水水产养殖污染物排放总量的研究[J]. 中国环境监测, 2007, 23(2): 94-97.
- Huang H, Wang X Q, Wei X H, et al. An research on the quantity of discharged pollutant of freshwater breed aquatics in Hangjiahu Area [J]. Environmental Monitoring in China, 2007, 23(2): 94-97.

(责任编辑: 陆雁)

(上接第 151 页 Continue from page 151)

- [12] Dalrymple R A, Kirby J T, Hwang P A. Wave Diffraction due to areas of energy dissipation [J]. J Wtrwy Port Coast and Oc Engrg ASCE, 1984, 110(1): 67-78.
- [13] 洪广文. 波浪折射、绕射数学模型[C]//第七届全国海岸工程学术讨论会论文集. 北京: 海洋出版社, 1993, 808-815.
- Hong G W. Numerical model for combined refraction and diffraction of water waves [C]//The 7th national coastal engineering symposium. Beijing: Ocean Press, 1993: 808-815.
- [14] 李孟国, 蒋德才. 关于波浪缓坡方程的研究[J]. 海洋通报, 1999, 18(4): 70-92.
- Li M G, Jiang D C. A review on the study of mild-Slope equation [J]. Marine Science Bulletin, 1999, 18(4): 70-92.
- [15] Kirby J T, Dalrymple R A. An approximate model for nonlinear dispersion in monochromatic wave propagation models [J]. Coastal Eng, 1986(9): 545-561.
- [16] Hedges T S. An approximate model for nonlinear dispersion in monochromatic wave propagation models by Kirby J T and Dalrymple R A discussion [J]. Coastal Eng, 1987(11): 87-89.
- [17] Li R J, Yan Y X, Cao H S. Nonlinear dispersion relation in wave transformation [J]. China Ocean Engrg, 2003, 17: 117-122.
- [18] Li R J, Tao J F. Analysis of wave nonlinear dispersion relations [J]. China Ocean Engineering, 2005, 19(1): 167-174.
- [19] Berkhoff J C W, Booy N, Radder A C. Verification of numerical wave propagation models for simple harmonic water wave [J]. Coastal Engineering, 1982, 6: 255-279.
- [20] Massel S R. Ocean surface waves: their physics and prediction [M]. Singapore: World Scientific Public, 1995: 339-343.
- [21] Maa J P Y, Hsu T W, Lee D Y. The RIDE mode: an enhanced computer program for wave transformation [J]. Ocean Engineering, 2002, 29: 1441-1458.

(责任编辑: 陆雁)