DOI:10.13657/j.cnki.gxkxyxb.2013.03.010

广西科学院学报 2013,29(3):210～216
Journal of Guangxi Academy of Sciences Vol.29,No.3 August 2013

向量值 Littlewood-Paley 算子的多线性交换子的端点估计

The Weighted Endpoint Estimates for the Vector-valued Multilinear Littlewood-Paley Commutators

陈大钊[1],卢万佳[2]
CHEN Da-zhao[1],LU Wan-jia[2]

(1.邵阳学院理学与信息科学系,湖南邵阳 422000;2.湖南省南县第一中学,湖南益阳 413206)
(1.Department of Science and Information Science ,Shaoyang University,Shaoyang,Hunan,422000,China;2.The First High School of Nan County,Yiyang,Hunan,413206,China)

摘要:证明向量值 Littlewood-Paley 算子的多线性交换子 $|g_{\psi}^{\vec{b}}|_r$ 的端点有界性,即 $|g_{\psi}^{\vec{b}}|_r$ 是从 $L^{\infty}(w)$ 到 $BMO(w)$ 有界的,$|g_{\psi}^{\vec{b}}|_r$ 是从 $B_p(w)$ 到 $CMO(w)$ 有界的.

关键词:Littlewood-Paley 算子 多线性交换子 BMO 空间 CMO 空间
中图法分类号:O174.3 **文献标识码**:A **文章编号**:1002-7378(2013)03-0210-07

Abstract:The weighted endpoint estimates for the vector-valued multilinear Littlewood-Paley commutators $|g_{\psi}^{\vec{b}}|_r$ are studied. $|g_{\psi}^{\vec{b}}|_r$ is bounded from $L^{\infty}(w)$ to $BMO(w)$ and $|g_{\psi}^{\vec{b}}|_r$ is bounded from $B_p(w)$ to $CMO(w)$.

Key words:Littlewood-Paley operator,multilinear commutator,BMO,CMO

Calderon 和 Zygmund 在上世纪 50 年代创立了奇异积分理论,并且在对奇异积分算子的研究中获得了重要的结论。而 Littlewood-Paley 函数的出现是基于向量积分算子的有界性估计,即 Littlewood-Paley 关于所谓平方积分函数的理论。这种形式的函数首先出现在 Kaczmarz 和 Zygmund 关于正交展开(一维)的几乎处处可求和的研究中。本世纪 30 年代,经过 Littlewood-Paley 等人的不断研究,Littlewood-Paley 类函数现已成为以他们的名字命名的系统理论。而在平方积分函数中的经典例子就是所谓的 g-函数,他由 R^n 上函数的 Poisson 积分的梯度构成,是一个非线性算子。其目的是企图通过其 Poisson 核的性质来获得该函 L^p 模的某些特征,从而为研究算子在 L^p 上的有界性、几乎处处存在性以及 L^p 乘子的充分条件提供了方便。受奇异积分交换子的启发,1993 年,Alverez,Babgy 等[1]定义了 Litllewood-Paley 交换子 $g_{\psi}{}^{b}$,并且证明 Littlewood-Paley 交换子是 L^q 有界的,弱(1,1)有界的,其中 $1<q<\infty$,$b\in BMO(R^n)$。同时对 Littlewood-Paley 交换子 g_{ψ}^{b} 还进行了准确估计及端点估计。本文将主要讨论向量值多线性 Littlewood-Paley 交换子 $|g_{\psi}\vec{b}|_r$ 的一些端点有界性。

收稿日期:2013-05-05
修回日期:2013-07-02
作者简介:陈大钊(1979-),男,讲师,主要从事调和分析研究。

1 定义及引理

首先介绍一些记号(见文献[2～8]).

定义 1 对于非负权函数 w,我们称加权中心 BMO 空间为 $CMO(w)$:

$$CMO(w)=\{f\in L_{loc}(R^n):\|f\|_{CMO(w)}<\infty\},$$

其中

$$\|f\|_{CMO(w)}=\sup_{r>1}(w(Q(0,r)))^{-1}\int_Q|f(x)-f_Q|w(x)\mathrm{d}x.$$

定义 2 设 $1<p<\infty$,w 是 R^n 上的非负权函数,定义

$B_p(w)=\{f\in L_{loc}(R^n):\|f\|_{B_p(w)}=\sup_{r>1}[w(Q(0,r))]^{-1/p}\|f\chi_{Q(0,r)}\|_{L^p(w)}<\infty\}.$

引理 1[9] **对任何的** $f_i(x)\in L^p(R^n),1\leqslant i\leqslant 2,\frac{1}{r}+\frac{1}{s}=1,r>1,s>1$,**有** Hölder **不等式**:

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q|f_1(x)f_2(x)|\mathrm{d}x\leqslant(\frac{1}{|Q|}\int_Q|f_1(x)|^r\mathrm{d}x)^{1/r}(\frac{1}{|Q|}\int_Q|f_1(x)|^s\mathrm{d}x)^{1/s}.$$

引理 2[10] **令** $1<r<\infty,1<p<\infty,w\in A_p$,**那么** $|g_\psi|_r$ **在** $L^p(w)$ **有界.**

引理 3[9] **令** $w\in A_p,p>1,\chi_Q$ **是方体** Q **的特征函数,那么** $w\chi_Q$ **也属于** A_p.

2 主要结果

下面我们将主要研究 $|g_\psi^{\vec{b}}|_r$ **的端点有界性,即** $|g_\psi^{\vec{b}}|_r$ **是从** $L^\infty(w)$ **到** $BMO(w)$ **有界的,从** $B_p(w)$ **到** $CMO(w)$ **有界的. 我们有如下的结论:**

定理 1 **设** $1<r<\infty,w\in A_1,\vec{b}=(b_1,\cdots,b_m)$,**其中** $b_j\in BMO(R^n),1\leqslant j\leqslant m$,**则** $|g_\psi^{\vec{b}}|_r$ **是从** $L^\infty(w)$ **到** $BMO(w)$ **有界的.**

证明 **只需证明对于任意的方体** Q,**存在常数** C_Q **使得**

$$\frac{1}{w(Q)}\int_Q\|g_\psi^{\vec{b}}(f)(x)|_r-C_Q|w(x)\mathrm{d}x\leqslant C\||f|_r\|_{L^\infty(w)}.$$

对于方体 $Q=Q(x_0,r)$,**我们将** f **分解成** $f=g+h=\{g_i\}+\{h_i\}$,**其中** $g_i=f_i\chi_Q,h_i=f_i\chi_{(Q)^c}$. **设** $(b_j)_Q=|Q|^{-1}\int_Q b_j(y)\mathrm{d}y,1\leqslant j\leqslant m$,**则当** $m=1$ **时,有**

$$F_t^{b_1}(f_i)(x)=(b_1(x)-(b_1)_Q)F_t(f_i)(x)-F_t((b_1-(b_1)_Q)g_i)(x)-F_t((b_1-(b_1)_Q)h_i)(x),$$

于是,根据 Minkowski **不等式得**

$$\frac{1}{w(Q)}\int_Q\|g_\psi^{b_1}(f)(x)|_r-|g_\psi((b_1-(b_1)_Q)h)(x_0)|_r|w(x)\mathrm{d}x\leqslant$$
$$\frac{1}{w(Q)}\int_Q\||F_t^{b_1}(f)(x)\|_r-\|F_t((b_1-(b_1)_Q)h)(x_0)\|_r|w(x)\mathrm{d}x\leqslant$$
$$\frac{1}{w(Q)}\int_Q(\sum_{i=1}^\infty\||F_t^{b_1}(f_i)(x)-F_t((b_1-(b_1)_Q)h_i)(x_0)\|^r)^{1/r}w(x)\mathrm{d}x\leqslant$$
$$\frac{1}{w(Q)}\int_Q(\sum_{i=1}^\infty\|(b_1(x)-(b_1)_Q)F_t(f_i)(x)\|^r)^{1/r}w(x)\mathrm{d}x+$$
$$\frac{1}{w(Q)}\int_Q(\sum_{i=1}^\infty\|F_t((b_1-(b_1)_Q)g_i)(x)\|^r)^{1/r}w(x)\mathrm{d}x+$$
$$\frac{1}{w(Q)}\int_Q(\sum_{i=1}^\infty\|F_t((b_1-(b_1)_Q)h_i)(x)-F_t((b_1-(b_1)_Q)h_i)(x_0)\|^r)^{1/r}w(x)\mathrm{d}x=\mathrm{I}+\mathrm{II}+\mathrm{III}.$$

对于 Ⅰ,**由于** $w\in A_1\subset A_p$,**又已知对任意的** $w\in A_p$,**则** $w\chi_Q\in A_p$,**设** $1/p+1/p'=1,1/q+1/q'=1$,**由** Hölder **不等式,逆** Hölder **不等式及引理** 1,**得**

$$\mathrm{I}=\frac{1}{w(Q)}\int_Q|b_1(x)-(b_1)_Q\|g_\psi(f)(x)|_r w(x)\mathrm{d}x\leqslant$$
$$\frac{1}{w(Q)}(\int_Q|b_1(x)-(b_1)_Q|^{p'}w(x)\mathrm{d}x)^{1/p'}(\int_Q|g_\psi(f)(x)|_r^p\cdot w(x)\mathrm{d}x)^{1/p}\leqslant\frac{C}{w(Q)}(\int_Q|b_1(x)-(b_1)_Q|^{p'}w(x)\mathrm{d}x)^{1/p'}\||f|_r\|_{L^\infty(w)}\cdot$$
$$(\int_Q w(x)\mathrm{d}x)^{1/p}\leqslant\frac{C}{w(Q)}[(\int_Q|b_1(x)-(b_1)_Q|^{p'q'}\mathrm{d}x)^{1/q'}(\int_Q w(x)^q\mathrm{d}x)^{1/q}]^{1/p'}\times\||f|_r\|_{L^\infty(w)}w(Q)^{1/p}\leqslant$$
$$Cw(Q)^{1/p-1}|Q|^{1/p'}\|b_1\|_{BMO}\cdot(\frac{1}{|Q|}\int_Q w(x)^q\mathrm{d}x)^{1/p'q}\||f|_r\|_{L^\infty(w)}\leqslant C\|b_1\|_{BMO}\||f|_r\|_{L^\infty(w)}.$$

对于 Ⅱ,**取** $p>1$,**由** $|g_\psi|_r$ **的** $L^p(w)$ **有界性及** Hölder **不等式得**

$$\mathrm{II}\leqslant(\frac{1}{w(Q)}\int_Q|g_\psi((b_1-(b_1)_Q)g)(x)|_r^p w(x)\mathrm{d}x)^{1/p}\leqslant$$
$$Cw(Q)^{-1/p}(\int_{R^n}|(b_1(x)-(b_1)_Q)g(x)|_r^p w(x)\mathrm{d}x)^{1/p}\leqslant$$
$$Cw(Q)^{-1/p}[(\int_Q|b_1(x)-(b_1)_Q|^{pq'}\mathrm{d}x)^{1/q'}(\int_Q|f(x)|_r^{pq}w(x)^q\mathrm{d}x)^{1/q}]^{1/p}\leqslant$$
$$Cw(Q)^{-1/p}(\int_Q|b_1(x)-(b_1)_Q|^{pq'}\mathrm{d}x)^{1/pq'}(\int_Q|f(x)|_r^{pq}w(x)\mathrm{d}x)^{1/pq}\leqslant$$
$$Cw(Q)^{-1/p}(\int_Q|b_1(x)-(b_1)_Q|^{pq'}\mathrm{d}x)^{1/pq'}\cdot(\int_Q w(x)^q\mathrm{d}x)^{1/pq}\||f|_r\|_{L^\infty(w)}\leqslant$$
$$Cw(Q)^{-1/p}|Q|^{1/pq'}\|b_1\|_{BMO}\cdot|Q|^{1/pq}(\frac{1}{|Q|}\int_Q w(x)^q\mathrm{d}x)^{1/pq}\|\cdot$$

$| f |_r \|_{L^\infty(w)} \leqslant C \| b_1 \|_{BMO} (\frac{|Q|}{w(Q)})^{1/p} \cdot$
$(\frac{1}{|Q|}\int_Q w(x)dx)^{1/p} \| |f|_r \|_{L^\infty(w)} \leqslant$
$C \| b_1 \|_{BMO} \| |f|_r \|_{L^\infty(w)}$.

对于 Ⅲ,**由** $Q^c = \bigcup_{k=0}^{\infty}\{2^{k+1}Q \backslash 2^k Q\}$,**则有**

$\| F_t((b_1-(b_1)_Q)h)(x) - F_t((b-b_Q)h)(x_0) \|_r \leqslant (\int_0^\infty (\int_{R^n} | \psi_t(x-y) - \psi_t(x_0-y) \| b_1(y)-(b_1)_Q \| g(y) |_r dy)^2 \frac{dt}{t})^{1/2} \leqslant C | x-x_0 |^\varepsilon \sum_{k=0}^{\infty}\int_{2^{k+1}Q\backslash 2^kQ} | x_0-y |^{-(n+\varepsilon)} | b_1(y)-(b_1)_Q \| f(y) |_r dy \leqslant$
$C\sum_{k=1}^{\infty} | Q |^{\varepsilon/n} | 2^kQ |^{-(1+\varepsilon/n)} \int_{2^kQ} | b_1(y)-(b_1)_Q \| f(y) |_r dy \leqslant C \| b_1 \|_{BMO} \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot 2^{-k\varepsilon} \| |f|_r \|_{L^\infty(w)} \leqslant C \| b_1 \|_{BMO} \| |f|_r \|_{L^\infty(w)}$.

于是

$$Ⅲ \leqslant C \| b_1 \|_{BMO} \| |f|_r \|_{L^\infty(w)}.$$

当 $m>1$ **时,有**

$F_t^{\vec{b}}(f_i)(x) = \int_{R^n}(b_1(x)-b_1(y))\cdots(b_m(x)-b_m(y))\psi_t(x-y)f_i(y)dy = (b_1(x)-(b_1)_Q)\cdots(b_m(x)-(b_m)_Q)F_t(f_i)(x) + (-1)^m F_t((b_1-(b_1)_Q)\cdots(b_m-(b_m)_Q)f_i)(x) + \sum_{j=1}^{m-1}\sum_{\sigma\in C_j^m}(-1)^{m-j}(b(x)-b_Q)_\sigma \int_{R^n}(b(y)-b_Q)_{\sigma^c}\psi_t(x-y)f_i(y)dy = (b_1(x)-(b_1)_Q)\cdots(b_m(x)-(b_m)_Q)F_t(f_i)(x) + (-1)^m F_t((b_1-(b_1)_Q)\cdots(b_m-(b_m)_Q)g_i)(x) + (-1)^m F_t((b_1-(b_1)_Q)\cdots(b_m-(b_m)_Q)h_i)(x) + \sum_{j=1}^{m-1}\sum_{\sigma\in C_j^m}(-1)^{m-j}(b(x)-b_Q)_\sigma F_t((b-b_Q)_{\sigma^c}f_i)(x)$,

因此根据 Minkowski **不等式,有**

$\frac{1}{w(Q)}\int_Q \| g_\psi^{\vec{b}}(f)(x) |_r - | g_\psi((b_1-(b_1)_Q)\cdots(b_m-(b_m)_Q))h)(x_0) |_r | w(x)dx \leqslant$
$\frac{1}{w(Q)}\int_Q \| | F_t^{\vec{b}}(f)(x) \|_r - \| F_t((b_1-(b_1)_Q)\cdots(b_m-(b_m)_Q))h)(x_0) \|_r | w(x)dx \leqslant$
$\frac{1}{w(Q)}\int_Q (\sum_{i=1}^{\infty} \| F_t^{\vec{b}}(f_i)(x) - F_t(\prod_{j=1}^{m}(b_j-(b_j)_Q)h_i)(x_0) \|^r)^{1/r} w(x)dx \leqslant$
$\frac{1}{w(Q)}\int_Q (\sum_{i=1}^{\infty} \| (b_1(x)-(b_1)_Q)\cdots(b_m(x)-(b_m)_Q)F_t(f_i)(x) \|^r)^{1/r} w(x)dx +$
$\frac{1}{w(Q)}\int_Q (\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{m-1}\sum_{\sigma\in C_j^m} \| (b(x)-(b)_Q)_\sigma F_t^{b_{\sigma^c}}(f_i)(x) \|^r)^{1/r} w(x)dx +$
$\frac{1}{w(Q)}\int_Q (\sum_{i=1}^{\infty} \| F_t((b_1-(b_1)_Q)\cdots(b_m-(b_m)_Q)g_i)(x) \|^r)^{1/r} w(x)dx +$
$\frac{1}{w(Q)}\int_Q (\sum_{i=1}^{\infty} \| F_t((b_1-(b_1)_Q)\cdots(b_m-(b_m)_Q)h_i)(x) - F_t((b_1-(b_1)_Q)\cdots(b_m-(b_m)_Q)h_i)(x_0) \|^r)^{1/r} w(x)dx = Ⅰ_1 + Ⅰ_2 + Ⅰ_3 + Ⅰ_4$.

对于 $Ⅰ_1$,**令** $1<q<\infty$,$1/q_1+1/q_2+\cdots+1/q_m+1/q=1$,$1/p+1/p'=1$,**运用广义** Hölder **不等式和逆** Hölder **不等式,有**

$Ⅰ_1 \leqslant \frac{C}{w(Q)}(\int_Q | (b_1(x)-(b_1)_Q)\cdots(b_m(x)-(b_m)_Q) |^{p'} w(x)dx)^{1/p'} \times$
$(\int_Q | g_\psi(f)(x) |_r^p w(x)dx)^{1/p} \leqslant$
$\frac{C}{w(Q)}(\int_Q | b_1(x)-(b_1)_Q |^{p'} \cdots | b_m(x)-(b_m)_Q |^{p'} w(x)dx)^{1/p'} \times$
$\| |f|_r \|_{L^\infty(w)} (\int_Q w(x)dx)^{1/p} \leqslant$
$\frac{Cw(Q)^{1/p}}{w(Q)} \| |f|_r \|_{L^\infty(w)} \leqslant [\prod_{j=1}^{m}(\int_Q | b_j(x)-(b_j)_Q |^{p'q_j} dx)^{1/q_j} (\int_Q w(x)^q dx)^{1/q}]^{1/p'} \leqslant$
$\frac{C}{w(Q)} \| |f|_r \|_{L^\infty(w)} w(Q)^{1/p} \cdot$
$| Q |^{1/p'q_1+\cdots+1/p'q_m} \| \vec{b} \|_{BMO} \leqslant$
$[| Q |^{1/q-1}\int_Q w(x)dx]^{1/p'} \leqslant$
$C \| \vec{b} \|_{BMO} \| |f|_r \|_{L^\infty(w)} w(Q)^{1/p'+1/p-1} \cdot$
$| Q |^{(1/q_1+\cdots+1/q_m+1/q-1)/p'} \leqslant C \| \vec{b} \|_{BMO} \| |f|_r \|_{L^\infty(w)}$.

对于 $Ⅰ_2$,**由** Hölder **不等式和逆** Hölder **不等式,可得**

$Ⅰ_2 \leqslant \sum_{j=1}^{m-1}\sum_{\sigma\in C_j^m}\frac{1}{w(Q)}\int_Q | (b(x)-b_Q)_\sigma \| g_\psi((b-b_Q)_{\sigma^c}f)(x) |_r w(x)dx \leqslant \sum_{j=1}^{m-1}\sum_{\sigma\in C_j^m}\frac{C}{w(Q)} \cdot$
$(\int_Q | (b(x)-b_Q)_\sigma |^{p'} w(x)dx)^{1/p'} \times$
$(\int_Q | g_\psi((b-b_Q)_{\sigma^c}f)(x) |_r^p w(x)dx)^{1/p} \leqslant$
$C\sum_{j=1}^{m-1}\sum_{\sigma\in C_j^m}(\frac{1}{w(Q)}\int_Q | b(x)-b_Q)_\sigma |^{p'} w(x)dx)^{1/p'} \times$
$(\frac{1}{w(Q)}\int_Q | g_\psi((b-b_Q)_{\sigma^c}f)(x) |_r^p w(x)dx)^{1/p} =$

$C\sum_{j=1}^{m-1}\sum_{\sigma\in C_j^m}K_1K_2$.

对于 K_1,由 Hölder 不等式,有

$$K_1=w(Q)^{-1/p'}(\int_Q|(b(x)-b_Q)_\sigma|^{p'}w(x)\mathrm{d}x)^{1/p'}\leqslant Cw(Q)^{-1/p'}[(\int_Q|(b(x)-b_Q)_\sigma|^{p'q'}\mathrm{d}x)^{1/q'}(\int_Q w(x)^q\mathrm{d}x)^{1/q}]^{1/p'}\leqslant$$

$$Cw(Q)^{-1/p'}(\int_Q|(b(x)-b_Q)|^{p'q'}\mathrm{d}x)^{1/p'q'}[(\int_Q w(x)^q\mathrm{d}x)^{1/q}]^{1/p'}\leqslant$$

$$Cw(Q)^{-1/p'}|Q|^{1/p'q'}\|\vec{b}_\sigma\|_{BMO}[|Q|^{1/q}\cdot(\frac{1}{|Q|}\int_Q w(x)^q\mathrm{d}x)^{1/q}]\leqslant$$

$$Cw(Q)^{-1/p'}|Q|^{1/p'q'+1/p'q-1/p'}w(Q)^{1/p'}\|\vec{b}_\sigma\|_{BMO}\leqslant C\|\vec{b}_\sigma\|_{BMO}.$$

对于 K_2,由于 $w\in A_1\subset A_p$,且已知对任意的 $w\in A_p$ 有 $w\chi_Q\in A_p$,再由引理 1 有

$$K_2=(\frac{1}{w(Q)}\int_Q|g_\psi((b-b_Q)_{\sigma^c}f)(x)|_r^p w(x)\mathrm{d}x)^{1/p}\leqslant$$

$$Cw(Q)^{-1/p}(\int_Q|(b(x)-b_Q)_{\sigma^c}f(x)|_r^p w(x)\mathrm{d}x)^{1/p}\leqslant$$

$$Cw(Q)^{-1/p}(\int_Q|(b(x)-b_Q)_{\sigma^c}|^{pq'}\mathrm{d}x)^{1/pq'}(\int_Q|f(x)|_r^{pq}w(x)^q\mathrm{d}x)^{1/pq}\leqslant$$

$$Cw(Q)^{-1/p}|Q|^{1/pq'}\|\vec{b}_{\sigma^c}\|_{BMO}|Q|^{1/pq}\cdot(\frac{1}{|Q|}\int_Q w(x)^q\mathrm{d}x)^{1/pq}\||f|_r\|_{L^\infty(w)}\leqslant$$

$$C\|\vec{b}_{\sigma^c}\|_{BMO}(\frac{|Q|}{w(Q)})^{1/p}(\frac{1}{|Q|}\int_Q w(x)\mathrm{d}x)^{1/p}\cdot\||f|_r\|_{L^\infty(w)}\leqslant C\|\vec{b}_{\sigma^c}\|_{BMO}\||f|_r\|_{L^\infty(w)}.$$

因此

$$\mathrm{I}_2\leqslant C\sum_{j=1}^{m-1}\sum_{\sigma\in C_j^m}\|\vec{b}_\sigma\|_{BMO}\|\vec{b}_{\sigma^c}\|_{BMO}\cdot\||f|_r\|_{L^\infty(w)}\leqslant C\|\vec{b}\|_{BMO}\||f|_r\|_{L^\infty(w)}.$$

对于 I_3,取 $p>1$,由 $|g_\psi|_r$ 的 $L^p(w)$ 有界性及 Hölder 不等式,

$$\mathrm{I}_3=\frac{1}{w(Q)}\int_Q|g_\psi((b_1-(b_1)_Q)\cdots(b_m-(b_m)_Q)g)(x)|_r w(x)\mathrm{d}x\leqslant C(\frac{1}{w(Q)}\int_Q|g_\psi((b_1-(b_1)_Q)\cdots(b_m-(b_m)_Q)g)(x)|_r^p w(x)\mathrm{d}x)^{1/p}\leqslant$$

$$Cw(Q)^{-1/p}(\int_Q|(b_1(x)-(b_1)_Q)\cdots(b_m(x)-(b_m)_Q)g(x)|_r^p w(x)\mathrm{d}x)^{1/p}\leqslant$$

$$Cw(Q)^{-1/p}|Q|^{1/pq'}\|\vec{b}\|_{BMO}\cdot|Q|^{1/pq}(\frac{1}{|Q|}\int_Q w^q\mathrm{d}x)^{1/pq}\cdot\||f|_r\|_{L^\infty(w)}\leqslant C\|\vec{b}\|_{BMO}(\frac{|Q|}{w(Q)})^{1/p}\cdot(\frac{w(Q)}{|Q|})^{1/p}\||f|_r\|_{L^\infty(w)}\leqslant$$

$$C\|\vec{b}\|_{BMO}\||f|_r\|_{L^\infty(w)}.$$

对于 I_4,有

$$\|F_t(\prod_{j=1}^m(b_j-(b_j)_Q)h)(x)-F_t(\prod_{j=1}^m(b_j-(b_j)_Q)h)(x_0)\|_r\leqslant[\int_0^\infty(\int_{R^n}|\psi_t(x-y)-\psi_t(x_0-y)\|f(y)|_r\prod_{j=1}^m|b_j(y)-(b_j)_Q|\mathrm{d}y)^2\frac{\mathrm{d}t}{t}]^{1/2}\leqslant$$

$$C|x-x_0|^\varepsilon\sum_{k=0}^\infty\int_{2^{k+1}Q\backslash 2^kQ}|x_0-y|^{-(n+\varepsilon)}|f(y)|_r\cdot\prod_{j=1}^m|b_j(y)-(b_j)_Q|\mathrm{d}y\leqslant C|x-x_0|^\varepsilon\sum_{k=1}^\infty\int_{2^kQ}|x_0-y|^{-(n+\varepsilon)}|f(y)|_r\prod_{j=1}^m|b_j(y)-(b_j)_Q|\mathrm{d}y\leqslant C\|\vec{b}\|_{BMO}\sum_{k=1}^\infty k^m2^{-k\varepsilon}\||f|_r\|_{L^\infty(w)}\leqslant$$

$$C\|\vec{b}\|_{BMO}\||f|_r\|_{L^\infty(w)}.$$

因此

$$\mathrm{I}_4\leqslant C\|\vec{b}\|_{BMO}\||f|_r\|_{L^\infty(w)}.$$

综上估计,定理 1 证毕.

定理 2 设 $1<r<\infty$,$1<p<\infty$,$w\in A_1$,$\vec{b}=(b_1,\cdots,b_m)$,$b_j\in BMO(R^n)$,$1\leqslant j\leqslant m$.则 $|g_\psi^{\vec{b}}|_r$ 是 $B_p(w)$ 到 $CMO(w)$ 有界的.

证明 只须证明对于任意的方体 Q,存在常数 C_Q,使得

$$\frac{1}{w(Q)}\int_Q\|g_\psi^{\vec{b}}(f)(x)|_r-C_Q|w(x)\mathrm{d}x\leqslant C\||f|_r\|_{B_p(w)}.$$

对任意的方体 $Q=Q(0,d)$,其中 $d>1$,固定方体 $Q=Q(0,d)$,$d>1$,我们令 $f=g+h=\{g_i\}+\{h_i\}$.其中 $g_i=f_i\chi_Q$,$h_i=f_i\chi_{(Q)^c}$.当 $m=1$ 时,设 $(b_1)_Q=|Q|^{-1}\int_Q b_1(y)\mathrm{d}y$,则有

$$F_t^{b_1}(f_i)(x)=(b_1(x)-(b_1)_Q)F_t(f_i)(x)-F_t((b_1-(b_1)_Q)g_i)(x)-F_t((b_1-(b_1)_Q)h_i)(x),$$

于是根据 Minkowski 不等式,有

$$\frac{1}{w(Q)}\int_Q\|g_\psi^{b_1}(f)(x)|_r-|g_\psi((b_1-$$

$(b_1)_Q)h)(x_0)|_r|w(x)\mathrm{d}x\leqslant$
$\frac{1}{w(Q)}\int_Q\||F_t^{b_1}(f)(x)\|_r-\|F_t((b_1-$
$(b_1)_Q)h)(x_0)\|_r|w(x)\mathrm{d}x\leqslant$
$\frac{1}{w(Q)}\int_Q(\sum_{i=1}^{\infty}\||F_t^{b_1}(f_i)(x)-F_t((b_1-$
$(b_1)_Q)h_i)(x_0)\|^r)^{1/r}w(x)\mathrm{d}x\leqslant$
$\frac{1}{w(Q)}\int_Q(\sum_{i=1}^{\infty}\|(b_1(x)-$
$(b_1)_Q)F_t(f_i)(x)\|^r)^{1/r}w(x)\mathrm{d}x+$
$\frac{1}{w(Q)}\int_Q(\sum_{i=1}^{\infty}\|F_t((b_1-$
$(b_1)_Q)g_i)(x)\|^r)^{1/r}w(x)\mathrm{d}x+$
$\frac{1}{w(Q)}\int_Q(\sum_{i=1}^{\infty}\|F_t((b_1-(b_1)_Q)h_i)(x)-F_t((b_1-$
$(b_1)_Q)h_i)(x_0)\|^r)^{1/r}w(x)\mathrm{d}x=\mathrm{I}+\mathrm{II}+\mathrm{III}.$

对于 Ⅰ，**由于** $w\in A_1\subset A_p$，**又已知对任意的** $w\in A_p$，**则** $w\chi_Q\in A_p$，**对于** $1<p,q<\infty$，**设** $1/p+1/p'=1,1/q+1/q'=1$，**显然** $1<p',q'<\infty$，**则由逆** Hölder **不等式及引理** 1，**有**

$\mathrm{I}=\frac{1}{w(Q)}\int_Q|b_1(x)-$
$(b_1)_Q\|g_\psi(f)(x)|_r w(x)\mathrm{d}x\leqslant$
$\frac{C}{w(Q)}(\int_Q|b_1(x)-(b_1)_Q|^{p'}w(x)\mathrm{d}x)^{1/p'}\cdot$
$(\int_Q|g_\psi(f)(x)|_r{}^p w(x)\mathrm{d}x)^{1/p}\leqslant$
$\frac{C}{w(Q)}[(\int_Q|b_1(x)-$
$(b_1)_Q|^{p'q'}\mathrm{d}x)^{1/q'}(\int_Q w(x)^q\mathrm{d}x)^{1/q}]^{1/p'}\cdot$
$\||f|_r\chi_Q\|_{L^p(w)}\leqslant\frac{C}{w(Q)}|Q|^{1/p'q'}\|b_1\|_{BMO}\cdot$
$[(\int_Q w(x)^q\mathrm{d}x)^{1/q}]^{1/p'}\||f|_r\chi_Q\|_{L^p(w)}\leqslant$
$\frac{C}{w(Q)}|Q|^{1/p'q'}\|b_1\|_{BMO}|Q|^{1/p'q}(\frac{w(Q)}{|Q|})^{1/p'}\cdot$
$\||f|_r\chi_Q\|_{L^p(w)}\leqslant$
$C\|b_1\|_{BMO}w(Q)^{-1/p}\||f|_r\chi_Q\|_{L^p(w)}\leqslant$
$C\|b_1\|_{BMO}\||f|_r\|_{B_p(w)}.$

对于 Ⅱ，**取** $1<q<\infty,t',s>1$ **使得** $p>t's$ **且** $q=(pt'-t's/(p-t's)),1/t+1/t'=1$，**则由** $|g_\psi|_r$ **在** $L^s(w)$ **上的有界性及** Hölder **不等式，有**

$\mathrm{II}\leqslant C(\frac{1}{w(Q)}\int_Q|g_\psi((b_1-$
$(b_1)_Q)g)(x)|_r^s w(x)\mathrm{d}x)^{1/s}\leqslant$
$Cw(Q)^{-1/s}(\int_Q|(b_1(x)-$
$(b_1)_Q)g(x)|_r^s w(x)\mathrm{d}x)^{1/s}\leqslant$
$Cw(Q)^{-1/s}[(\int_Q|b_1(x)-(b_1)_Q|^{st}\mathrm{d}x)^{1/t}\cdot$
$(\int_Q|f(x)|_r{}^{t's}w(x)^{t'}\mathrm{d}x)^{1/t'}]^{1/s}\leqslant$
$Cw(Q)^{-1/s}|Q|^{1/ts}\|b_1\|_{BMO}\cdot$
$(\int_Q|f(x)|_r{}^{t's}w(x)^{t'}\mathrm{d}x)^{1/t's}\leqslant$
$Cw(Q)^{-1/s}|Q|^{1/ts}\|b_1\|_{BMO}\cdot$
$(\int_Q|f(x)|^p w(x)\mathrm{d}x)^{1/p}(\int_Q w(x)^q\mathrm{d}x)^{(p-s)/pqs}\leqslant$
$Cw(Q)^{-1/s}|Q|^{1/ts}|Q|^{(1-t')/t's}w(Q)^{(p-s)/ps}\cdot$
$\|b_1\|_{BMO}\||f|_r\chi_Q\|_{L^p(w)}\leqslant$
$Cw(Q)^{-1/p}\|b_1\|_{BMO}\||f|_r\chi_Q\|_{L^p(w)}\leqslant$
$C\|b_1\|_{BMO}\||f|_r\|_{B_p(w)}.$

对于 Ⅲ，**有**

$[(\int_{R^n}|\psi_t(x-y)-\psi_t(x_0-y)\|b_1(y)-$
$(b_1)_Q\|h(y)|_r\mathrm{d}y)^2\frac{\mathrm{d}t}{t}]^{1/2}\leqslant C|x-$
$x_0|^\varepsilon\sum_{k=0}^{\infty}\int_{2^{k+1}Q\backslash 2^kQ}|x_0-y|^{-(n+\varepsilon)}|b_1(y)-$
$(b_1)_Q\|f(y)|_r\mathrm{d}y\leqslant C|x-x_0|^\varepsilon\sum_{k=1}^{\infty}\int_{2^kQ}|x_0-$
$y|^{-(n+\varepsilon)}|b_1(y)-(b_1)_Q\|f(y)|_r\mathrm{d}y\leqslant$
$C\sum_{k=1}^{\infty}|Q|^{\varepsilon/n}|2^kQ|^{-(1+\varepsilon/n)}\int_{2^kQ}|b_1(y)-$
$(b_1)_Q\|f(y)|_r\mathrm{d}y\leqslant C\|b_1\|_{BMO}\cdot$
$\sum_{k=1}^{\infty}|Q|^{\varepsilon/n}|2^kQ|^{-(1+\varepsilon/n)}\cdot k|2^kQ|w(2^kQ)^{-1/p}\cdot$
$\||f|_r\chi_{2^kQ}\|_{L^p(w)}\leqslant C\|b_1\|_{BMO}\cdot$
$\||f|_r\|_{B_p(w)}\sum_{k=1}^{\infty}k\cdot 2^{-k\varepsilon}\leqslant$
$C\|b_1\|_{BMO}\||f|_r\|_{B_p(w)}.$

于是

$\mathrm{III}\leqslant C\|b_1\|_{BMO}\||f|_r\|_{B_p(w)}.$

当 $m>1$ **时，设** $\vec{b}_Q=((b_1)_Q,\cdots,(b_m)_Q)$，**其中** $(b_j)_Q=|Q|^{-1}\int_Q|b_j(y)|\mathrm{d}y,1\leqslant j\leqslant m$，**那么**

$F_t^{\vec{b}}(f_i)(x)=(b_1(x)-(b_1)_Q)\cdots(b_m(x)-$
$(b_m)_Q)F_t(f_i)(x)+(-1)^m F_t((b_1-(b_1)_Q)\cdots(b_m-$
$(b_m)_Q)g_i)(x)+(-1)^m F_t((b_1-(b_1)_Q)\cdots(b_m-$
$(b_m)_Q)h_i)(x)+\sum_{j=1}^{m-1}\sum_{\sigma\in C_j^m}(-1)^{m-j}(\vec{b}(x)-$
$\vec{b}_Q)_\sigma F_t(((\vec{b})-\vec{b}_Q)_{\sigma^c}f_i)(x).$

因此根据 Minkowski **不等式，有**

$\frac{1}{w(Q)}\int_Q \| g_\psi^{\vec{b}}(f)(x)|_r - | g_\psi((b_1 - (b_1)_Q)\cdots(b_m-(b_m)_Q))h)(x_0)|_r | w(x)dx \leqslant$
$\frac{1}{w(Q)}\int_Q \| |F_t^{\vec{b}}(f)(x)\|_r - \|F_t((b_1 - (b_1)_Q)\cdots(b_m-(b_m)_Q))h)(x_0)\|_r | w(x)dx \leqslant$
$\frac{1}{w(Q)}\int_Q (\sum_{i=1}^{\infty}\|F_t^{\vec{b}}(f_i)(x) - F_t(\prod_{j=1}^{m}(b_j - (b_j)_Q)h_i)(x_0)\|^r)^{1/r}w(x)dx \leqslant$
$\frac{1}{w(Q)}\int_Q (\sum_{i=1}^{\infty}\|(b_1(x) - (b_1)_Q)\cdots(b_m(x)-(b_m)_Q F_t(f_i)(x)\|^r)^{1/r}\cdot w(x)dx + \frac{1}{w(Q)}\int_Q(\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{m-1}\sum_{\sigma\in C_j^m}\|(b(x)-(b)_Q)_\sigma F_t^{\vec{b}_{\sigma^c}}(f_i)(x)\|^r)^{1/r}w(x)dx +$
$\frac{1}{w(Q)}\int_Q (\sum_{i=1}^{\infty}\|F_t((b_1-(b_1)_Q)\cdots(b_m-(b_m)_Q)g_i)(x)\|^r)^{1/r}w(x)dx + \frac{1}{w(Q)}\cdot$
$\int_Q(\sum_{i=1}^{\infty}\|F_t((b_1-(b_1)_Q)\cdots(b_m-(b_m)_Q)h_i)(x) - F_t((b_1-(b_1)_Q)\cdots(b_m-(b_m)_Q)h_i)(x_0)\|^r)^{1/r}w(x)dx = \mathrm{I}_1 + \mathrm{I}_2 + \mathrm{I}_3 + \mathrm{I}_4$.

对于 I_1,**类似于** $m=1$,**有**

$$\mathrm{I}_1 \leqslant \frac{C}{w(Q)}(\int_Q |(b_1(x)-(b_1)_Q)\cdots(b_m(x) - (b_m)_Q)|^{p'}w(x)dx)^{1/p'} \times (\int_Q |g_\psi(f)(x)|_r{}^p w(x)dx)^{1/p} \leqslant$$
$$\frac{C}{w(Q)}(\int_Q |(b_1(x)-(b_1)_Q)\cdots(b_m(x) - (b_m)_Q)|^{p'q'}dx)^{1/p'q'} \times (\int_Q w(x)^q dx)^{1/p'q}\cdot$$
$$\| |f|_r\chi_Q\|_{L^p(w)} \leqslant \frac{C}{w(Q)}|Q|^{1/p'q'}\|\vec{b}\|_{BMO}\cdot |Q|^{1/p'q}(\frac{w(Q)}{|Q|})^{1/p'}\| |f|_r\chi_Q\|_{L^p(w)} \leqslant$$
$$C\|\vec{b}\|_{BMO}w(Q)^{-1/p}\| |f|_r\chi_Q\|_{L^p(w)} \leqslant C\|\vec{b}\|_{BMO}\| |f|_r\|_{B_p(w)}.$$

对于 I_2,**取** $1 < s, s' < \infty, 1/s + 1/s' = 1$,**那么**

$$\mathrm{I}_2 \leqslant \sum_{j=1}^{m-1}\sum_{\sigma\in C_j^m}\frac{1}{w(Q)}\int_Q |(b(x)-b_Q)_\sigma \| g_\psi((b-b_Q)_{\sigma^c}f)(x)|_r w(x)dx \leqslant$$
$$C\sum_{j=1}^{m-1}\sum_{\sigma\in C_j^m}(\frac{1}{w(Q)}\int_Q |(b(x)-b)_\sigma|^{s'}w(x)dx)^{1/s'} \times (\frac{1}{w(Q)}\int_Q |g_\psi((b-b_Q)_{\sigma^c}f)(x)|_r^s w(x)dx)^{1/s} = C\sum_{j=1}^{m-1}\sum_{\sigma\in C_j^m}K_1K_2.$$

对于 K_1,**由** Hölder **不等式,有**

$$K_1 \leqslant Cw(Q)^{-1/s'}[(\int_Q |(b(x) - b_Q)_\sigma|^{s'q'}dx)^{1/q'}(\int_Q w(x)^q dx)^{1/q}]^{1/s'} \leqslant$$
$$Cw(Q)^{-1/s'}(\int_Q |(b(x)-b_Q)_\sigma)|^{s'q'}dx)^{1/s'q'}\cdot [(\int_Q w(x)^q dx)^{1/q}]^{1/s'} \leqslant Cw(Q)^{-1/s'}|Q|^{1/s'q'+1/s'q-1/s'}\cdot w(Q)^{1/s'}\|\vec{b}_\sigma\|_{BMO} \leqslant C\|\vec{b}_\sigma\|_{BMO}.$$

对于 K_2,**由引理** 1,**有**

$$K_2 \leqslant Cw(Q)^{-1/s}(\int_Q |(b(x) - b_Q)_\sigma f(x)|_r^s w(x)dx)^{1/s} \leqslant$$
$$Cw(Q)^{-1/s}[(\int_Q |(b(x)-b_Q)_\sigma|^{st}dx)^{1/t}\cdot (\int_Q |f(x)|_r^{t's}w(x)^{t'}dx)^{1/t'}]^{1/s} \leqslant$$
$$Cw(Q)^{-1/s}|Q|^{1/ts}\|\vec{b}_\sigma\|_{BMO}\cdot (\int_Q |f(x)|_r^{t's}w(x)^{t'}dx)^{1/t's} \leqslant Cw(Q)^{-1/s}|Q|^{1/ts}\cdot$$
$$\|\vec{b}_\sigma\|_{BMO}(\int_Q |f(x)|_r{}^p w(x)dx)^{1/p}\cdot (\int_Q w(x)^q dx)^{(p-s)/pqs} \leqslant Cw(Q)^{-1/p}\|\vec{b}_\sigma\|_{BMO}\cdot$$
$$\| |f|_r\chi_Q\|_{L^p(w)} \leqslant C\|\vec{b}_\sigma\|_{BMO}\| |f|_r\|_{B_p(w)}.$$

于是

$$\mathrm{I}_2 \leqslant C\|\vec{b}\|_{BMO}\| |f|_r\|_{B_p(w)}.$$

对于 I_3,**类似于** Ⅱ,**有**

$$\mathrm{I}_3 \leqslant C(\frac{1}{w(Q)}\int_{R^n} |g_\psi((b_1-(b_1)_Q)\cdots(b_m - (b_m)_Q)g)(x)|_r^s w(x)dx)^{1/s} \leqslant$$
$$Cw(Q)^{-1/s}(\int_Q |(b_1(x)-(b_1)_Q)\cdots(b_m(x) - (b_m)_Q)f(x)|_r^s w(x)dx)^{1/s} \leqslant$$
$$Cw(Q)^{-1/p}\|\vec{b}\|_{BMO}\| |f|_r\chi_Q\|_{L^p(w)} \leqslant C\|\vec{b}\|_{BMO}\| |f|_r\|_{B_p(w)}.$$

对于 I_4,**类似于** Ⅲ,**有**

$$[\int_0^\infty(\int_{R^n} |\psi_t(x-y) - \psi_t(x_0 - y)|\prod_{j=1}^{m}|b_j(y) - b_j(x)\| h(y)|_r dy)^2\frac{dt}{t}]^{1/2} \leqslant$$
$$C|x-x_0|^\varepsilon\sum_{k=0}^{\infty}\int_{2^{k+1}Q\setminus 2^kQ}|x_0 -$$

$y|^{-(n+\varepsilon)}\prod_{j=1}^{m}|b_j(y)-(b_j)_Q\| f(y)|_r\mathrm{d}y\leqslant$

$C\sum_{k=1}^{\infty}2^{-k\varepsilon}\frac{1}{|2^kQ|}\int_{2^kQ}\prod_{j=1}^{m}|b_j(y)-$

$(b_j)_Q\| f(y)|_r\mathrm{d}y\leqslant C\|\vec{b}\|_{BMO}\cdot$

$\||f|_r\|_{B_p(w)}\sum_{k=1}^{\infty}k^m\cdot$

$2^{-k\varepsilon}\leqslant C\|\vec{b}\|_{BMO}\||f|_r\|_{B_p(w)}.$

于是

$$\mathrm{I}_4\leqslant C\|\vec{b}\|_{BMO}\||f|_r\|_{B_p(w)}.$$

定理 2 证毕.

参考文献:

[1] Alvarez J,Babgy R J,Kurtz D S,et al. Weighted estimates for commutators of linear operators[J]. Studia Math,1993,104:195-209.

[2] Garcia Cuerva J,Herrero M J L. A theory of Hardy spaces associated to Herz spaces[J]. Proc London Math Soc,1994,69:605-628.

[3] Alvarez J. Continuity properties for linear commutators of Calderón-Zygmund operators[J]. Collect Math,1998,49:17-31.

[4] Chanillo S. A note on commutators Indiana Univ[J]. Math J,1982,31:7-16.

[5] Chen W G,Hu G E. Weak type (H^1,L^1) estimate for a multilinear singular integral operator[J]. Adv in Math (China),2001,30(1):63-69.

[6] Christ M. Weak type (1,1) bounds for rough operators [J]. Ann of Math,1988,124:19-42.

[7] Liu L Z. Boundedness of multilinear operator on TriebelLizorkin spaces[J]. Inter J of Math and Math Sci,2004,5:259-271.

[8] Liu L Z,Lu S Z,Xu J S. Boundedness for commutators of Littlewood-Paley operators[J]. Adv in Math(China),2003,32:473-480.

[9] Torchinsky A. The real variable methods in harmonic analysis[M]//Torchinsky A. Pure and Applied Math. New York:Academic Press,1986,123.

[10] Wilson J M. A simple proof of the atomic decomposition for $H^p(R^n)$,$0<p\leqslant 1$[J]. Studia Math,1982,74:25-33.

（责任编辑:尹　闯）

（上接第 206 页）

害防治策略上,应当推行综合防治,注重生物防治,或选择高效、低毒、低残留的化学农药进行防治,以利于保护天敌,减少环境污染,确保人畜安全。在营林措施上,提倡营造混交林,实行轮作、间作等。

3.5　加强合作研究,提高监测防治水平

2000 年以来,庞正轰[2,5,9~11]、奚福生[12]、于永辉[13]、曹书阁[7,8]等对桉树病虫害开展了一些研究,对有效控制按树病虫害发挥了一些作用。但是,这些研究还远远不能满足生产需要。目前,我国桉树有害生物正处在增长阶段。有害生物的种类、发生规律、危害特点和防治方法还没有完全掌握。有些病虫可跨区域发生危害。因此,应当建立产学研联盟,搭建合作平台,联合申报项目,开展合作研究,重点研究解决重大病虫害监测防治技术问题。

参考文献:

[1] 杨民胜,谢耀坚,刘杰锋. 中国桉树研究三十年[M]. 北京:中国林业出版社,2010.

[2] 庞正轰. 桉树虫害的发展趋势和防治方法[M]//欧阳权. 开发桉树新技术. 南宁:广西民族出版社,1992:211-219.

[3] Ross Wylie. Report of China eucalyptus pest insects [C]. 1991.

[4] Pang Zhenghong. Eucalyptus pests in China[M]. Australian Centre for International Agricultural Research,Eucalypts In Asia,2003:183-185.

[5] 庞正轰. 中国桉树害虫现状和防治对策[J]. 广西林业科学,2001(4):169-179.

[6] 广西林业厅. 广西森林病虫害普查资料[Z]. 广西林业厅主编,1983.

[7] 曹书阁,庞正轰,杨秀好,等. 桉蝙蛾幼虫空间分布型研究[J]. 安徽农业科学,2011(19):11492-11495.

[8] 曹书阁,罗世念,何荣焕. 不同药剂防治桉蝙蛾幼虫试验研究[J]. 现代农业科学,2012(10):157-163.

[9] 庞正轰,谭勇正,向达勇,等. 桉树红叶枯梢病防治试验初报[J]. 中国森林病虫,2010(2):38-40.

[10] 庞正轰. 经济林主要病虫害防治技术[M]. 南宁:广西科学技术出版社,2004.

[11] 庞正轰. 桉树人工林丰产技术[M]. 南宁:广西科学技术出版社,2008.

[12] 奚福生,罗基同,李贵玉,等. 中国桉树病虫害及害虫天敌[M]. 南宁:广西科学技术出版社,2007.

[13] 于永辉,杨振德,庞正轰,等. 中国桉树蛀干害虫研究现状[J]. 中国森林病虫,2011(3):25-28.

（责任编辑:邓大玉）