DOI:10.13657/j.cnki.gxkxyxb.2013.02.021

广西科学院学报 2013,29(2):80~82
Journal of Guangxi Academy of Sciences Vol. 29,No. 2 May 2013

(2+1)维变系数 Broer-Kaup 系统的精确解*

The Explicit Solutions for the (2+1)-dimensional Variable Coefficient Broer-Kaup Equation

马志民[1],孙峪怀[2]
MA Zhi-min[1],SUN Yu-huai[2]

(1.成都理工大学工程技术学院,四川乐山 614000;2.四川师范大学数学与软件科学学院,四川成都 610066)
(1. Engineering and Technical College of Chengdu Uinversity of Technology,Leshan,Sichuan,614000,China;2. Institute of Mathematics and Software Science,Sichuan Normal University,Chengdu,Sichuan,610066,China)

摘要:借助计算软件 Maple 和一阶微分方程解题方法,得到(2+1)维变系数 Broer-Kaup 系统 3 种形式的新的精确解:双曲函数解、三角函数解和实函数解.

关键词:Broer-Kaup 系统 一阶微分方程 解题方法 精确解
中图法分类号:O175.2 **文献标识码**:A **文章编号**:1002-7378(2013)02-0080-03

Abstract:With the aid of Maple software and simple equation method, three kinds of new exact solutions for the (2+1)-dimensional Broer-Kaup system are obtained, which are hyperbolic function solutions, trigonometric function solutions and rational function solutions.

Key words:Broer-Kaup equation,simplest equation,method,explicit solution

由于变系数非线性偏微分方程可以描述一些科学领域中的非线性现象,如化学,生物,通讯,量子物理等,所以在这些领域中寻找非线性偏微分方程的精确解已引起广泛的关注[1,2].

方程

$$\begin{cases} u_{ty} = \alpha(t)[u_{xxy} - 2(uu_x)_y - 2v_{xx}], \\ v_t = \alpha(t)[-v_{xx} - 2(vu)_x], \end{cases}$$

$$\alpha(t) \neq 0 \tag{1}$$

已广泛应用于等离子物理,流体动力学,非线性光纤通信和各种物理状态的波动现象.在文献[3]中,Sachin Kumar 等人讨论了方程(1)的 Painlevé 性质和对称性,证明方程(1)是可积的.文献[4]利用 (G'/G)-展开法成功地构造了方程(1)的精确解,其中包括一类可通过选择适当的参数变为类孤子形式的精确解.本文将借助于计算软件 Maple 和一阶微分方程方法[5,6]来构造(2+1)维变系数 Broer-Kaup 系统的精确解.由于我们重新构造了一阶微分方程的新类型解,从而可以说获得了(2+1)维变系数 Broer-Kaup 系统更多的新精确解.

1 一阶微分方程解题方法

一阶微分方程解题法的步骤如下:

步骤 1 给定一个变系数偏微分方程

$$P(u, u_t, u_{tt}, u_{xx}, u_{yy}, \cdots) = 0. \tag{2}$$

步骤 2 假设方程(2)有如下形式的解

$$u(x,y,t) = u(\xi) = \sum_{i=0}^{m} a_i(t) z^i, \tag{3}$$

这里 $\xi = k(t)x + l(t)y - c(t)$,$a_i(t), i = 0,1,2\cdots, m$,$k(t), l(t), c(t)$ 是关于 t 的未知函数,z 是下述一阶微分方程的一个解

$$z' = \sum_{i=0}^{n} c_i z^i, \tag{4}$$

其中 $c_i (i = 0,1,\cdots,n)$ 是未知常数.

在方程(3)和方程(4)中,m 和 n 是正整数,且可以通过平衡方程(2)中的最高次线性项和非线性项

收稿日期:2012-09-28
修回日期:2013-01-10
作者简介:马志民(1984),男,助教,主要从事数学物理方程研究。
*四川省教育厅科研基金项目(批准号:No. 10ZA004)资助。

来确定. 文献[7,8]给出了方程(4)的几种其它形式,如 广义的 Riccati 方程[7]

$$z' = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 , \tag{5}$$

一阶的三次微分方程[8]

$$z' = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 . \tag{6}$$

为了计算方便,可以设方程(4) 为如下形式

$$z' = c_1 z + c_n z^n , \tag{7}$$

$$z' = c_n z^n . \tag{8}$$

方程(7)有下列形式的解

$$z_1 = \left(\frac{c_1 \exp[c_1(n-1)\xi]}{1 - c_n \exp[c_1(n-1)\xi]}\right)^{\frac{1}{n-1}}, c_1 > 0, c_n < 0,\ ^{[9]} \tag{9}$$

$$z_2 = \left(\frac{-c_1 \exp[c_1(n-1)\xi]}{1 + c_n \exp[c_1(n-1)\xi]}\right)^{\frac{1}{n-1}}, c_1 < 0, c_n > 0,\ ^{[9]} \tag{10}$$

$$z_3 = \left(-\frac{c_1}{2c_n} \pm \sqrt{-\frac{c_1^2}{4c_n^2}} \tan\left(\pm c_n(n-1)\right)\sqrt{-\frac{c_1^2}{4c_n^2}}\xi\right)^{\frac{1}{n-1}}. \tag{11}$$

方程(8)的解为

$$z_4 = \pm \frac{1}{\sqrt[n-1]{(1-n)c_n\xi + C}} , \tag{12}$$

这里 n 是正整数, $c_i (i = 1,2,\cdots,n)$ 是未知常数, z_1 和 z_2 在文献[9]中已经给出.

步骤 3 将方程(3)和(7)(或(8))代入到方程(2),令 z 的各次幂系数为零,得到关于 $a_i(t)(i = 0,1,2,\cdots,m)$, $k(t)$, $l(t)$, $c(t)$ 的代数方程组.

步骤 4 借助计算软件 Maple 解上面的代数方程组,得到关于 $a_i(t)(i = 0,1,2,\cdots,m)$, $k(t)$, $l(t)$, $c(t)$ 的值. 然后将这些值代入到方程(3),就可获得方程(2)的精确解.

2 (2+1)维变系数 Broer-Kaup 系统精确解

令 $v = u_y$,那么方程(1)能够写成如下形式

$$u_{ty} + \alpha(t) u_{xxy} + 2\alpha(t)(uu_x)_y = 0 . \tag{13}$$

平衡方程(13)中的最高次线性项 u_{xxy} 和最高次非线性项,得到 $m = n - 1$.

2.1 基于方程(7)的精确解

令 $n = 2$ 和 $m = 1$ 时 ,方程(3) 变为

$$u(x,y,t) = u(\xi) = a_0(t) + a_1(t) z . \tag{14}$$

利用一阶微分方程法,可以得到如下结果:

$$k(t) = k, l(t) = l, a_0(t) = a_0(t), a_1(t) = -kc_2, c(t) = \int_a^t \alpha(s) k^2(s) c_1 + 2\alpha(s) a_0(s) k(s) \mathrm{d}s ,$$

这里 k, l 是任意常数, $a_0(t)$ 是关于 t 的任意函数.

当 $c_2 < 0, c_1 > 0$,方程(1)有双曲函数解

$$u_1(\xi) = a_0(t) - kc_2 \frac{c_1 \exp[c_1\xi]}{1 - c_2 \exp[c_1\xi]} = a_0(t) - kc_2 \frac{c_1 \sinh[c_1\xi] + c_1 \cosh[c_1\xi]}{1 - c_2 \sinh[c_1\xi] - c_2 \cosh[c_1\xi]},$$

$$v_1(\xi) = \int_a^y [a_0(t) - kc_2 \frac{c_1 \sinh[c_1\xi] + c_1 \cosh[c_1\xi]}{1 - c_2 \sinh[c_1\xi] - c_2 \cosh[c_1\xi]}] \mathrm{d}y ,$$

其中 $\xi = k(t)x + l(t)y - c(t), c(t) = \int_a^t \alpha(s) k^2(s) c_1 + 2\alpha(s) a_0(s) k(s) \mathrm{d}s$.

当 $c_2 > 0, c_1 < 0$,方程(1)有双曲函数解

$$u_2(\xi) = a_0(t) + kc_2 \frac{c_1 \exp[c_1\xi]}{1 + c_2 \exp[c_1\xi]} = a_0(t) + kc_2 \frac{c_1 \sinh[c_1\xi] + c_1 \cosh[c_1\xi]}{1 + c_2 \sinh[c_1\xi] + c_2 \cosh[c_1\xi]} ,$$

$$v_2(\xi) = \int_a^y [a_0(t) + kc_2 \frac{c_1 \sinh[c_1\xi] + c_1 \cosh[c_1\xi]}{1 + c_2 \sinh[c_1\xi] + c_2 \cosh[c_1\xi]}] \mathrm{d}y ,$$

其中 $\xi = k(t)x + l(t)y - c(t), c(t) = \int_a^t \alpha(s) k^2(s) c_1 + 2\alpha(s) a_0(s) k(s) \mathrm{d}s$.

由方程(11)知方程(1)有三角函数解

$$u_3(\xi) = a_0(t) + kc_1 \mp kc_2 \sqrt{-\frac{c_1^2}{4c_2^2}} \cdot \tan(\pm c_2 \sqrt{-\frac{c_1^2}{4c_2^2}}\xi) = a_0(t) + \frac{kc_1}{2} \mp \frac{kc_1 i}{2} \tan(\pm \frac{c_1 i}{2}\xi),$$

$$v_3(\xi) = \int_a^y [a_0(t) + \frac{kc_1}{2} \mp \frac{kc_1 i}{2} \tan(\pm \frac{c_1 i}{2}\xi)] \mathrm{d}y,$$

其中 $\xi = k(t)x + l(t)y - c(t), c(t) = \int_a^t \alpha(s) k^2(s) c_1 + 2\alpha(s) a_0(s) k(s) \mathrm{d}s$. 若利用 $\tanh x = -i \tan ix$, $u_3(\xi)$ 和 $v_3(\xi)$ 又变为双曲函数形式.

当 $n = 3$ 和 $m = 2$ 时 ,利用一阶微分方程法,可以得到如下结果:

$$k(t) = k, l(t) = l, a_0(t) = a_0(t), a_1(t) = 0, a_2(t) = -2kc_3 c(t) = \int_a^t -2\alpha(s) k(s) a_0(s) - 2\alpha(s) c_1 k^2(s) \mathrm{d}s ,$$

这里 k, l 是任意常数, $a_0(t)$ 是关于 t 的任意函数.

当 $c_3 < 0, c_1 > 0$ 时 ,方程(1)有双曲函数解

$$u_4(\xi) = a_0(t) - 2kc_3 \frac{c_1 \exp[2c_1\xi]}{1 - c_3 \exp[2c_1\xi]} = a_0(t) - 2kc_3 \frac{c_1 \sinh[2c_1\xi] + c_1 \cosh[2c_1\xi]}{1 - c_3 \sinh[2c_1\xi] - c_3 \cosh[2c_1\xi]} ,$$

$$v_4(\xi)=\int_a^y[a_0(t)-$$

$$2kc_3\frac{c_1\sinh[2c_1\xi]+c_1\cosh[2c_1\xi]}{1-c_3\sinh[2c_1\xi]-c_3\cosh[2c_1\xi]}]\mathrm{d}y\ ,$$

这里 $\xi=k(t)x+l(t)y-c(t)$，$c(t)=\int_a^t-2\alpha(s)k(s)a_0(s)-2\alpha(s)c_1k^2(s)\mathrm{d}s$.

当 $c_3>0$，$c_1<0$ 时，方程(1)有双曲函数解

$$u_5(\xi)=a_0(t)-2kc_3\frac{-c_1\exp[2c_1\xi]}{1+c_3\exp[2c_1\xi]}=$$

$$a_0(t)+2kc_3\frac{c_1\sinh[2c_1\xi]+c_1\cosh[2c_1\xi]}{1+c_3\sinh[2c_1\xi]+c_3\cosh[2c_1\xi]}\ ,$$

$$v_5(\xi)=\int_a^y[a_0(t)+$$

$$2kc_3\frac{c_1\sinh[2c_1\xi]+c_1\cosh[2c_1\xi]}{1+c_3\sinh[2c_1\xi]+c_3\cosh[2c_1\xi]}]\mathrm{d}y\ ,$$

这里 $\xi=k(t)x+l(t)y-c(t)$，$c(t)=\int_a^t-2\alpha(s)k(s)a_0(s)-2\alpha(s)c_1k^2(s)\mathrm{d}s$.

利用(11)式，方程(1)有三角函数解

$$u_6(\xi)=a_0(t)-2kc_3(\frac{-c_1}{2c_3}\pm$$

$$\sqrt{-\frac{c_1^2}{4c_3^2}}\tan(\pm 2c_3\sqrt{-\frac{c_1^2}{4c_3^2}}\xi))^{\frac{1}{2}}=a_0(t)-$$

$$2kc_3(\frac{-c_1}{2c_3}\pm\frac{ic_1}{2c_3}i\tan(\pm c_1i\xi))^{\frac{1}{2}},v_6(\xi)=\int_a^y a_0(t)-$$

$$2kc_3(\frac{-c_1}{2c_3}\pm\frac{ic_1}{2c_3}i\tan(\pm c_1i\xi))^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}y\ ,$$

这里 $\xi=k(t)x+l(t)y-c(t)$，$c(t)=\int_a^t-2\alpha(s)k(s)a_0(s)-2\alpha(s)c_1k^2(s)\mathrm{d}s$. 利用 $\tanh x=-i\tan ix$，$u_6(\xi)$ 和 $v_6(\xi)$ 变为双曲函数形式. 由于 $m=n-1$，当令 m 和 n 为其它正整数时，还可以获得方程(1)更多形式的精确解.

2.2 基于方程(8)的精确解

利用方程(12)，方程(1)有实函数解

$$u_7(\xi)=a_0(t)\mp 2kc_3\frac{1}{\sqrt{-2c_3\xi+C}}\ ,$$

$$v_6(\xi)=\int_a^y a_0(t)\mp 2kc_3\frac{1}{\sqrt{-2c_3\xi+C}}\mathrm{d}y\ ,$$

这里 $\xi=k(t)x+l(t)y-c(t)$，$c(t)=\int_a^t-2\alpha(s)a_0(s)k(s)\mathrm{d}s$.

综上可以看出，本文将方程(4)中的 n 推广到其它正整数的情形，从而构造出(2+1)维 Broer-Kaup 系统更加复杂的精确解。

参考文献：

[1] Lou S Y,Ruan H Y. Conservation laws of the variable coefficient KdV and MkdV equations[J]. Acta Phys sin,1992,41:182-187.

[2] Sun Y H,Ma Z M,Li Y. Explicit Solutions for Generalized (2+1)-dimensional nonlinear Zakharov-Kuznetsov equation[J]. Commun Theor Phys,2010,54:397-400.

[3] Sachin Kumar K,Singh R K. Gupta,Painlevé analysis,Lie symmetries and exact solutions for (2+1)-dimensionalvariable coefficients Broer-Kaup equations[J]. Commun Nonlinear Sci Numer Simulat,2012,17:1529-1541.

[4] Li B Q,Ma Y L. The non-traveling wave solutions and novel fractal soliton for the(2+1)-dimensional Broer-Kaup equations with variable coefficients[J]. Commun Nonlinear Sci Numer Simulat,2011,16:144-149.

[5] Kudryashov N A. Exact solitary waves of the Fisher equation[J]. Phys Lett A,2005,342:99-106.

[6] Kudryashov NA. Simplestequation method to look for exact solutions of nonlinear differential equations[J]. Chaos Soliton Fract,2005,24:1217-1231.

[7] Xie F D,Zhang Y,Lü Z S. Symbolic computation in non-linear evolution equation:application to (3+1)-dimensional Kadomtsev-Petviashvili equation[J]. Chaos Soliton Fract,2005,24:257-263.

[8] LüH L,Liu X Q,Niu L. A generalized (G'/G)-expansion method and its applications to nonlinear evolution equations[J]. Appl Math Comput,2010,215:3811-3816.

[9] Nikolay K Vitanov. Modified method of simplest equation:Powerful tool for obtaining exact and approximate traveling-wave solutions of nonlinear PDEs[J]. Commun Nonlinear Sci Numer Simulat,2011,16:1176-1185.

(责任编辑:尹　闯)