DOI:10.13657/j.cnki.gxkxyxb.2013.02.020

广西科学院学报 2013,29(2):71～74
Journal of Guangxi Academy of Sciences Vol. 29,No. 2 May 2013

基于对称偏导数的多元函数 Taylor 公式及可微性分析*

Study of Taylor Formula and Differentiability for Multivariate Function based on the Symmetric Partial Derivative

张浩奇,伍欣叶**,张浩敏
ZHANG Hao-qi,WU Xin-ye,ZHANG Hao-min

(桂林理工大学理学院,广西桂林 541004)
(College of Science,Guilin University of Technology,Guilin,Guangxi,541004,China)

摘要:引入多元函数对称偏导和对称可微的定义,讨论多元函数在对称偏导数意义下的 Taylor 公式及多元函数对称可微的充分条件和必要条件.

关键词:对称偏导数 Taylor 公式 方向对称导数 对称可微
中图法分类号:O171 **文献标识码**:A **文章编号**:1002-7378(2013)02-0071-04

Abstract:First, the definition of the symmetric partial derivative and the symmetric differentiability of multivariate function are introduced in this paper. Second, the Taylor formula for multivariate function based on the symmetric partial derivative is given. Finally, the sufficient condition and the necessary condition for the symmetric differentiability of multivariate function are obtained.

Key words: symmetric partial derivative, Taylor formula, directional symmetric derivative, symmetric differentiable

对称导数是导数的推广,它在数值分析、测度论等领域有重要应用,许多学者对其进行过研究.文献[1]给出一阶对称导数的定义,讨论了对称导数与普通导数的关系.文献[2]讨论实函数的对称导数及对称导数的基本性质,研究对称可微函数的广义中值定理.文献[3]研究二元函数对称偏导数,讨论对称偏导数的性质,给出广义的微分中值定理,得到二元函数对称偏导数的 Taylor 公式.文献[4]将 Lipschitz 函数的对称导数推广到量子对称导数.文献[5]研究达布函数的对称导数和单调性、凸性关系.文献[6]将对称导数运用到数学规划中,对凸规划中的一些基本最优性和对偶定理进行扩展.其他有关对称导数的研究可参见文献[7～13].

从现有的文献可以看出,大部分研究仅限于讨论一元或二元函数的对称导数理论及应用,对多元函数的研究相对较少.本文在上述研究的基础上引入多元函数的对称偏导数和对称可微的定义,讨论多元函数在对称偏导数下的 Taylor 公式及多元函数对称可微的充分条件和必要条件,并举例说明理论结果的意义.

1 预备知识

根据文献[3,14～15],我们类比普通导数意义下多元函数的偏导数、方向导数、可微及高阶偏导数

收稿日期:2012-10-30
修回日期:2013-01-10
作者简介:张浩奇(1983-),男,硕士研究生,主要从事实分析、随机微分方程数值解研究。
*国家自然科学基金项目(11101101);广西教育厅基金项目(200911LX137);桂林理工大学科研启动项目资助。
**:通讯作者,伍欣叶(1977-),女,实验师,主要从事概率极限理论研究,Email:87447637@qq. com.

的定义，得到多元函数在对称导数意义下的相应定义.

定义1　设多元函数 $z=f(x^1,x^2,\cdots,x^m)$ 定义在 $P_0(x_0^1,x_0^2,\cdots,x_0^m)$ 的邻域 $U(P_0)\subset \mathrm{R}^m$ 内，$x^i=x_0^i$（常数），$i=1,2,\cdots,m$. 若 $\lim\limits_{h^j\to 0}(f(x_0^1,x_0^2,\cdots,x_0^{j-1},x_0^j+h^j,x_0^{j+1},\cdots,x_0^m)-f(x_0^1,x_0^2,\cdots,x_0^{j-1},x_0^j-h^j,x_0^{j+1},\cdots,x_0^m))/2h^j$ 存在，则称此极限是多元函数 $z=f(x^1,x^2,\cdots,x^m)$ 在 $P_0(x_0^1,x_0^2,\cdots,x_0^m)$ 点关于 x^j 的对称偏导数，记作 $z^s_{x^j}(x_0^1,x_0^2,\cdots,x_0^m)$ 或 $f^s_{x^j}(x_0^1,x_0^2,\cdots,x_0^m)$ 或 $\dfrac{\tilde{\partial} z}{\tilde{\partial} x^i}$.

注1　若多元函数 $z=f(x^1,x^2,\cdots,x^m)$ 在定义域 $G(G\subset \mathrm{R}^m)$ 上每一点 $P(x^1,x^2,\cdots,x^m)$ 都存在关于 x^j $(j=1,2,\cdots,m)$ 的对称偏导数，则称 $z^s_{x^j}(x^1,x^2,\cdots,x^m)$ 或 $f^s_{x^j}(x^1,x^2,\cdots,x^m)$ 或 $\dfrac{\tilde{\partial} z}{\tilde{\partial} x^i}$ 为多元函数 $z=f(x^1,x^2,\cdots,x^m)$ 在定义域 G 上关于 $x^j(j=1,2,\cdots,m)$ 的对称偏导函数.

定义2　设多元函数 $z=f(x),x=(x^1,x^2,\cdots,x^m)$ 在点 $M\in \mathrm{R}^m$ 的邻域 $U(M)\subset \mathrm{R}^m$ 内有定义，h 是空间 R^m 中的单位向量，$t\in \mathrm{R}$. 若极限

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{f(M+th)-f(M-th)}{2t}$$

存在，则称此极限为多元函数 $z=f(x)$ 在 M 点沿 h 方向的对称偏导数，记作 $f^s_h(M)$.

定义3　设多元函数 $z=f(x)$，$x=(x^1,x^2,\cdots,x^m)$ 在区域 $G(G\subset \mathrm{R}^m)$ 内有定义，$M\in G$. 若多元函数 $z=f(x)$ 在 M 点沿任意方向的对称导数都存在，则称函数 $z=f(x)$ 在 M 点对称可微.

注2　若多元函数 $z=f(x)$，$x=(x^1,x^2,\cdots,x^m)$ 在定义域 $G(G\subset \mathrm{R}^m)$ 上每一点都对称可微，则称多元函数 $z=f(x)$ 在定义域 G 上对称可微.

引理1　若多元函数 $z=f(x^1,x^2,\cdots,x^m)$ 在区域 $G(G\subset \mathrm{R}^m)$ 上对称可微，一元函数 $x^i=x^i(t)$ $(i=1,2,\cdots,m)$ 关于 $t\in \mathrm{R}$ 对称可导，则复合函数 $z=f[x^1(t),x^2(t),\cdots,x^m(t)]$ 关于 t 也对称可导，且

$$\frac{\tilde{d}z}{\tilde{d}t}=\sum_{i=1}^{m}\frac{\tilde{\partial} z}{\tilde{\partial} x^i}\cdot\frac{\tilde{d}x^i}{\tilde{d}t}.$$

证明　若给 t 以变量 Δt，则相应 $x^i(i=1,2,\cdots,m)$ 的改变量为

$$\Delta x^i=x^i(t+\Delta t)-x^i(t-\Delta t),i=1,2,\cdots,m.$$

由于多元函数 f 对称可微，故有

$$\Delta z=\sum_{i=1}^{m}\frac{\tilde{\partial} z}{\tilde{\partial} x^i}\cdot\Delta x^i+o\left(\sqrt{\sum_{i=1}^{m}(\Delta x^i)^2}\right),$$

即

$$\frac{\Delta z}{\Delta t}=\sum_{i=1}^{m}\frac{\tilde{\partial} z}{\tilde{\partial} x^i}\cdot\frac{\Delta x^i}{\Delta t}+\frac{o\left(\sqrt{\sum_{i=1}^{m}(\Delta x^i)^2}\right)}{\Delta t}.$$

又因 $x^i=x^i(t)(i=1,2,\cdots,m)$ 关于 t 对称可导，故当 $\Delta t\to 0$ 时，也有 $\Delta x^i\to 0$. 于是

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{o\left(\sqrt{\sum_{i=1}^{m}(\Delta x^i)^2}\right)}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{o\left(\sqrt{\sum_{i=1}^{m}(\Delta x^i)^2}\right)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{m}(\Delta x^i)^2}}\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\Delta x^i}{\Delta t}\right)^2}=0.$$

所以

$$\frac{\tilde{d}z}{\tilde{d}t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta t}=\sum_{i=1}^{m}\frac{\tilde{\partial} z}{\tilde{\partial} x^i}\cdot\frac{\tilde{d}x^i}{\tilde{d}t}.$$

定义4　设多元函数 $z=f(x),x=(x^1,x^2,\cdots,x^m)$ 对每个变量 $x^i(i=1,2,\cdots,m)$ 都有对称偏导数 $\dfrac{\tilde{\partial} f}{\tilde{\partial} x^i}$，那么此对称偏导数作为一个新函数 $\tilde{\partial}_i f(x^1,x^2,\cdots,x^m)$ 同样关于某个 $x^j(j=1,2,\cdots,m)$ 可以有对称偏导数 $\tilde{\partial}_j(\tilde{\partial}_i f)(x)$. 我们称 $\tilde{\partial}_j(\tilde{\partial}_i f)(x)$ 为多元函数 f 关于变量 x^i,x^j 的二阶对称偏导数，记作

$$\tilde{\partial}_{ji}f(x)\text{ 或 }\frac{\tilde{\partial}^2 f}{\tilde{\partial} x^j\tilde{\partial} x^i}(x).$$

根据以上二阶对称偏导数的定义，不妨假设已经定义 k 阶对称偏导数

$$\tilde{\partial}_{i_1 i_2\cdots i_k}f(x)=\frac{\tilde{\partial}^k f}{\tilde{\partial} x^{i_1}\tilde{\partial} x^{i_2}\cdots\tilde{\partial} x^{i_k}}(x),$$

那么，运用数学归纳法得到 $k+1$ 阶对称偏导数

$$\tilde{\partial}_{ii_1 i_2\cdots i_k}f(x)=\tilde{\partial}_i(\tilde{\partial}_{i_1 i_2\cdots i_k}f)(x).$$

引理2[10]　若多元函数 $z=f(x)$，$x=(x^1,x^2,\cdots,x^m)$ 关于 x^i,x^j 的二阶对称偏导数 $\tilde{\partial}_{ji}f(x)$ 和关于 x^j,x^i 的二阶对称偏导数 $\tilde{\partial}_{ij}f(x)$ 都在点 $x_0=(x_0^1,x_0^2,\cdots,x_0^m)$ 连续，则 $\tilde{\partial}_{ji}f(x_0)=\tilde{\partial}_{ij}f(x_0)$.

引理3[10]　设一元函数 f 在 (a,b) 上有直到 $n-1$ 阶的连续对称导数，在 (a,b) 上存在 $f^{\langle n\rangle}$，$x_0,x\in(a,b)$，则

$$f(x_0)+\frac{f^s(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f^s(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+$$

$$\cdots+\frac{f^{\langle n-1\rangle}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1}+\frac{f^{\langle n\rangle}(x_2)}{n!}(x-x_0)^n\leqslant f(x)\leqslant f(x_0)+\frac{f^s(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f^{\langle 2\rangle}(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{\langle n-1\rangle}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1}+\frac{f^{\langle n\rangle}(x_1)}{n!}(x-x_0)^n,$$

其中 $x_1,x_2\in(a,x_0)$,$f^{\langle n\rangle}$ 表示 n 阶对称导数.

2 主要结果

定理 1 如果多元函数 $f(x)$ 在点 $x=(x^1,x^2,\cdots,x^m)\in\mathrm{R}^m$ 的邻域 $U(x)\subset\mathrm{R}^m$ 上有定义,并且存在 n 阶连续的对称偏导数,$[x,x+h]\subset U(x)$,那么

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}(h^1\tilde{\partial}_1+h^2\tilde{\partial}_2+\cdots+h^m\tilde{\partial}_m)^k f(x)+\frac{1}{n!}(h^1\tilde{\partial}_1+h^2\tilde{\partial}_2+\cdots+h^m\tilde{\partial}_m)^n f(x+h_1)\leqslant f(x+h)\leqslant\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}(h^1\tilde{\partial}_1+h^2\tilde{\partial}_2+\cdots+h^m\tilde{\partial}_m)^k f(x)+\frac{1}{n!}(h^1\tilde{\partial}_1+h^2\tilde{\partial}_2+\cdots+h^m\tilde{\partial}_m)^n f(x+h_2),\quad(1)$$

其中 $f(x)=f(x^1,x^2,\cdots,x^m)$,$f(x+h)=f(x^1+h^1,x^2+h^2,\cdots,x^m+h^m)$,$f(x+h_1)=f(x^1+h_1^1,x^2+h_1^2,\cdots,x^m+h_1^m)$,$f(x+h_2)=f(x^1+h_2^1,x^2+h_2^2,\cdots,x^m+h_2^m)$,$0<h_1^i,h_2^i<h^i,i=1,2,\cdots,m$.

证明 对于辅助函数 $\varphi(t)=f(x+th)$,由已知条件知其定义在闭区间 $0\leqslant t\leqslant 1$ 上,并且存在 $n-1$ 阶连续的对称导数和 n 阶对称导数[10]. 因此,由一元函数在对称导数下推广的 Taylor 公式(引理 3)可以得到

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\varphi^{\langle k\rangle}(0)}{k!}t^k+\frac{\varphi^{\langle n\rangle}(t_1)}{n!}t^n\leqslant\varphi(t)\leqslant\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\varphi^{\langle k\rangle}(0)}{k!}t^k+\frac{\varphi^{\langle n\rangle}(t_2)}{n!}t^n,$$

其中 $t_1,t_2\in[0,1]$,$\varphi^{\langle k\rangle}(t)$ 表示 k 阶对称导数. 于是,当 $t=1$ 时,有

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\varphi^{\langle k\rangle}(0)}{k!}+\frac{\varphi^{\langle n\rangle}(t_1)}{n!}\leqslant\varphi(1)\leqslant\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\varphi^{\langle k\rangle}(0)}{k!}+\frac{\varphi^{\langle n\rangle}(t_2)}{n!}.\quad(2)$$

$$\varphi(1)=f(x+h)=f(x^1+h^1,x^2+h^2,\cdots,x^m+h^m),$$

$$\varphi(0)=f(x)=f(x^1,x^2,\cdots,x^m).$$

再求 $\varphi^s(t),\varphi^{\langle 2\rangle}(t),\cdots,\varphi^{\langle k\rangle}(t)$,即求复合函数 $f(x^1+th^1,x^2+th^2,\cdots,x^m+th^m)$ 的高阶对称导数. 由引理 1 及引理 2,有

$$\varphi^s(t)=(h^1\tilde{\partial}_1+h^2\tilde{\partial}_2+\cdots+h^m\tilde{\partial}_m)f(x+th),$$

$$\varphi^{\langle 2\rangle}(t)=[\varphi^s(t)]^s=[(h^1\tilde{\partial}_1+h^2\tilde{\partial}_2+\cdots+h^m\tilde{\partial}_m)f(x+th)]^s=h^1(h^1\tilde{\partial}_1+h^2\tilde{\partial}_2+\cdots+h^m\tilde{\partial}_m)\tilde{\partial}_1f(x+th)+h^2(h^1\tilde{\partial}_1+h^2\tilde{\partial}_2+\cdots+h^m\tilde{\partial}_m)\tilde{\partial}_2f(x+th)+\cdots+h^m(h^1\tilde{\partial}_1+h^2\tilde{\partial}_2+\cdots+h^m\tilde{\partial}_m)\tilde{\partial}_mf(x+th)=h^1h^1\tilde{\partial}_{11}f(x+th)+\cdots+h^1h^m\tilde{\partial}_{1m}f(x+th)+h^2h^1\tilde{\partial}_{21}f(x+th)+\cdots+h^2h^m\tilde{\partial}_{2m}f(x+th)+\cdots+h^mh^1\tilde{\partial}_{m1}f(x+th)+\cdots+h^mh^m\tilde{\partial}_{mm}f(x+th)=(h^1\tilde{\partial}_1+h^2\tilde{\partial}_2+\cdots+h^m\tilde{\partial}_m)^2f(x+th).$$

于是,由数学归纳法可得

$$\varphi^{\langle k\rangle}(t)=(h^1\tilde{\partial}_1+h^2\tilde{\partial}_2+\cdots+h^m\tilde{\partial}_m)^kf(x+th).$$

令 $t=0$,有

$$\varphi^{\langle k\rangle}(0)=(h^1\tilde{\partial}_1+h^2\tilde{\partial}_2+\cdots+h^m\tilde{\partial}_m)^kf(x).$$

将上述结果代入(2)式中,得

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}(h^1\tilde{\partial}_1+h^2\tilde{\partial}_2+\cdots+h^m\tilde{\partial}_m)^kf(x)+\frac{1}{n!}(h^1\tilde{\partial}_1+h^2\tilde{\partial}_2+\cdots+h^m\tilde{\partial}_m)^nf(x+h_1)\leqslant f(x+h)\leqslant\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}(h^1\tilde{\partial}_1+h^2\tilde{\partial}_2+\cdots+h^m\tilde{\partial}_m)^k\cdot f(x)+\frac{1}{n!}(h^1\tilde{\partial}_1+h^2\tilde{\partial}_2+\cdots+h^m\tilde{\partial}_m)^nf(x+h_2),$$

其中 $f(x)=f(x^1,x^2,\cdots,x^m)$,$f(x+h)=f(x^1+h^1,x^2+h^2,\cdots,x^m+h^m)$,$f(x+h_1)=f(x^1+h_1^1,x^2+h_1^2,\cdots,x^m+h_1^m)$,$f(x+h_2)=f(x^1+h_2^1,x^2+h_2^2,\cdots,x^m+h_2^m)$,$0<h_1^i,h_2^i<h^i,i=1,2,\cdots,m$.

定理 2 设多元函数 $z=f(x^1,x^2,\cdots,x^m)$ 在其定义域内某一点 M 处对称可微,则多元函数 f 在 M 点关于每个自变量的对称偏导数存在,即 $f^s_{x^j}(M)(j=1,2,\cdots,m)$ 存在.

定理 2 的证明由对称可微的定义(定义 3)易得.

定理 3 设多元函数 $z=f(x^1,x^2,\cdots,x^m)$ 的对称偏导数 $f^s_{x^j}(M)(j=1,2,\cdots,m)$ 在点 M 的某一邻域 $U(M)\subset\mathrm{R}^m$ 内存在,且 $f^s_{x^j}(M)(j=1,2,\cdots,m)$ 在点 M 处它们都连续,则多元函数 $z=f(x^1,x^2,\cdots,x^m)$ 在该点对称可微.

证明　设 $h=(h^1,h^2,\cdots,h^m)$ 是 R^m 中任意方向的单位向量，则

$\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{f(M+th)-f(M-th)}{2t}=\lim\limits_{t\to 0^+}(f(x^1+th^1,x^2+th^2,\cdots,x^m+th^m)-f(x^1-th^1,x^2-th^2,\cdots,x^m-th^m))/2t=\lim\limits_{t\to 0^+}[(f(x^1+th^1,x^2+th^2,\cdots,x^m+th^m)-f(x^1-th^1,x^2+th^2,\cdots,x^m+th^m))/2t+(f(x^1-th^1,x^2+th^2,\cdots,x^m+th^m)-f(x^1-th^1,x^2-th^2,\cdots,x^m+th^m))/2t+\cdots+(f(x^1-th^1,x^2-th^2,\cdots,x^m+th^m)-f(x^1-th^1,x^2-th^2,\cdots,x^m-th^m))/2t]$.

由 $f^s_{x^j}(M)(j=1,2,\cdots,m)$ 的存在性及连续性知上述极限存在，于是由对称可微的定义知函数在该点对称可微.

3　实例

例1　讨论定义在空间 R^m 上的多元函数 $f(x_0^1,x_0^2,\cdots,x_0^m)=|x_0^1+x_0^2+\cdots+x_0^m|$ 在点 $P_0(0,0,\cdots,0)$ 的偏导数与对称偏导数，在偏导数意义下的Tarlor公式与在对称偏导数意义下的Tarlor公式及其可微性与对称可微性.

解　事实上，

$f^s_{x^j}(0,0,\cdots,0)=\lim\limits_{h^j\to 0}(f(0,0,\cdots,0,0+h^j,0,\cdots,0)-f(0,0,\cdots,0,x_0^j-h^j,0,\cdots,0))/2h^j=\lim\limits_{h^j\to 0}\dfrac{0}{2h^j}=0$，

即对称偏导数 $f^s_{x^j}(0,0,\cdots,0)(j=1,2,\cdots,m)$ 存在. 而

$\lim\limits_{h^j\to 0}(f(0,0,\cdots,0,0+h^j,0,\cdots,0)-f(0,0,\cdots,0,0,0,\cdots,0))/h^j=\lim\limits_{h^j\to 0}\dfrac{|h^j|}{h^j}=$

$$\begin{cases}\lim\limits_{h^j\to 0^+}\dfrac{|h^j|}{h^j}=\lim\limits_{h^j\to 0^+}\dfrac{h^j}{h^j}=1,\\ \lim\limits_{h^j\to 0^-}\dfrac{|h^j|}{h^j}=\lim\limits_{h^j\to 0^+}\dfrac{-h^j}{h^j}=-1,\end{cases}\quad j=1,2,\cdots,m.$$

即偏导数 $f'_{x^j}(0,0,\cdots,0)(j=1,2,\cdots,m)$ 不存在. 根据定理1，我们不难发现例1中多元函数 f 在 $P_0(0,0,\cdots,0)$ 能用对称偏导数意义下的Tarlor公式展开，但由文献[14]中的Tarlor定理知，f 在 $P_0(0,0,\cdots,0)$ 不能用偏导数意义下的Tarlor公式展开. 再由定理3知，例1中多元函数 f 在点 $P_0(0,0,\cdots,0)$ 是对称可微的，但由于其偏导数不存在，故多元函数 f 在点 $P_0(0,0,\cdots,0)$ 不可微.

例1的结果表明，多元函数在某点偏导数不存在时，其对称偏导数可能存在；多元函数在某点不能用偏导数意义下的Tarlor公式展开时，可能可以用对称偏导数意义下的Tarlor公式展开；多元函数在某点不可微时，但有可能对称可微.

参考文献：

[1] Aull C E. The first symmetric derivative[J]. Amer Math Mon, 1967, 74(6): 708-711.

[2] Sahoo P K. Quasi-mean value theorems for symmetrically differentiable functions[J]. Tamsui Oxford J Infor Math Sci, 2011, 27(3): 279-301.

[3] 李秀林. 对称偏导数及其性质[J]. 数学学习与研究, 2010, 10: 108-109.

[4] Ash J M. Symmetric and quantum symmetric derivatives of Lipschitz functions[J]. J Math Anal Appl, 2003, 288: 717-721.

[5] Weil C E. Monotonicity, convexity and symmetric derivates[J]. Trans Amer Math Soc, 1976, 221: 225-237.

[6] Minch R A. Applications of symmetric derivatives in mathematical programming[J]. Math Program, 1971, 1: 307-320.

[7] Larson L. The symmetric derivative[J]. Trans Amer Math Soc, 1983, 277(2): 589-599.

[8] Belna C L, Evans M J, Humke P D. Symmetric and ordinary differentiation[J]. Proc Amer Math Soc, 1978, 72: 261-267.

[9] Larson L. The baire class of approximate symmetric derivates[J]. Proc Amer Math Soc, 1983, 87: 125-130.

[10] 梁波，王玉斌. 对称导数及其相关理论[J]. 渤海大学学报, 2004, 25(4): 351-354.

[11] 樊自安，陈昌银. 对称函数的偏导数[J]. 孝感学院学报, 2010, 3(30): 31-32.

[12] 祝英杰，李冠英. 二元函数的对称偏导数及其相关理论[J]. 长春大学学报, 2007, 17(5): 20-23.

[13] 李广民，宋国乡. 非线性算子的对称导数[J]. 西安电子科技大学学报, 1996, 23(1): 80-84.

[14] 陈传璋，金福临，朱学炎，等. 数学分析[M]. 北京：高等教育出版社, 1983: 144-185.

[15] B. A. 卓里奇. 数学分析：第1卷[M]. 第4版. 蒋择，王昆扬，周美珂，等译. 北京：高等教育出版社, 2006: 403-410.

（责任编辑：尹　闯）