

几类有向图的优美性*

Gracefulness of Several Types Digraphs

徐云
XU Yun

(黄冈师范学院数学与计算机科学学院, 湖北黄冈 438000)

(College of Mathematics and Computing Sciences, Huanggang Normal University, Huanggang, Hubei, 438000, China)

摘要: 探讨三类由 m 个有向圈 \vec{C}_4 构成的有向图的优美性. 给出他们的优美标号, 证明这三类图都是优美图.

关键词: 有向图 有向圈 优美标号 优美图

中图分类号: O157.5 文献标识码: A 文章编号: 1002-7378(2013)02-0069-02

Abstract: In this paper, gracefulness of three types digraphs that was composed of m directed circles \vec{C}_4 was explored and verified by giving their graceful labeling and mathematical proofs.

Key words: digraphs, directed circle, graceful labeling, graceful graphs

优美图^[1]在通讯网络, X-射线晶体学, 雷达和无线电定位, 编码理论, 射电天文学等领域都有重要的应用. 因此与优美图相关的研究已成为图论中非常活跃的课题之一, 很多数学工作者在此方面进行过研究. 目前关于无向图的优美性理论已取得了许多成果^[2,3], 但是关于有向图的优美性研究成果尚不多见, 尤其对有向圈的研究. 本文探讨三类由 m 个有向圈 \vec{C}_4 构成的有向图的优美性, 证明这三类图都是优美图.

定义 1^[1] 设图 $G = (V, E)$ 是有 p 个顶点 q 条弧的有向图, 如果存在一个单射 $f: V(G) \rightarrow \{0, 1, 2, \dots, q\}$, 使得对所有的弧 $(u, v) \in E(G)$, 由 $f^*(u, v) = [f(v) - f(u)] \pmod{(q+1)}$ 导出的映射 $f^*: E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, q\}$ 是一个双射, 则称 f 是有向图 G 的一个优美标号. 此时称有向图 G 是优美的.

定理 1 有向图 $\vec{C}_{4,m}$ 是优美图.

证明 由如图 1 易知 $q = 5m - 1$.

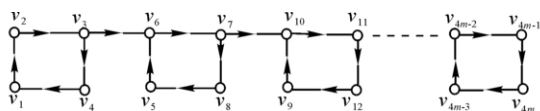


图 1 有向图 $\vec{C}_{4,m}$

令

$$f(v_i) = \frac{i-1}{2}, i = 1, 3, 5, \dots, 4m-1;$$

$$f(v_j) = 5m - \frac{3}{4}j, j = 4, 8, 12, \dots, 4m;$$

$$f(v_t) = 5m - 1 - \frac{3}{4}(t-2), t = 2, 6, 10, \dots, 4m-2;$$

易知以上标号 $f: V(G) \rightarrow \{0, 1, 2, \dots, q\}$ 为单射. 再令

$$f^*(v_{i+3}, v_i) = [f(v_i) - f(v_{i+3})] \pmod{(q+1)} = \frac{5i+7}{4}, i = 1, 5, 9, \dots, 4m-3;$$

$$f^*(v_i, v_{i+1}) = [f(v_{i+1}) - f(v_i)] \pmod{(q+1)} = 5m - \frac{5i-1}{4}, i = 1, 5, 9, \dots, 4m-3;$$

$$f^*(v_i, v_{i+1}) = [f(v_{i+1}) - f(v_i)] \pmod{(q+1)} = 5m - \frac{5i+1}{4}, i = 3, 7, 11, \dots, 4m-1;$$

$$f^*(v_i, v_{i+1}) = [f(v_{i+1}) - f(v_i)] \pmod{(q+1)} = \frac{5i-2}{4}, i = 2, 6, 10, \dots, 4m-2;$$

$$f^*(v_i, v_{i+3}) = [f(v_{i+3}) - f(v_i)] \pmod{(q+1)} = 5m - \frac{5i+5}{4}, i = 3, 7, 11, \dots, 4m-5;$$

易见 $f^*: E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, q\}$ 是一个双射, 即 f 为有向图 $\vec{C}_{4,m}$ 的优美标号, 故有向图 $\vec{C}_{4,m}$ 是优美图.

性质 1 对于任意正整数 m , 优美有向图 $\vec{C}_{4,m}$ 中任一有向圈 \vec{C}_4 的弧优美值之和为 $10m$.

证明 设第 t 个有向圈 \vec{C}_4 , 其顶点依次为 $v_{4t-3}, v_{4t-2}, v_{4t-1}, v_{4t}$, 则其弧优美值之和为

收稿日期: 2012-08-14

修回日期: 2013-02-18

作者简介: 徐云 (1974-), 女, 讲师, 硕士, 主要从事组合数学研究.

* 黄冈师范学院自然科学基金项目 (项目编号: 2012013703) 资助.

$$f^*(v_{4t-3}, v_{4t-2}) + f^*(v_{4t-2}, v_{4t-1}) + f^*(v_{4t-1}, v_{4t}) + f^*(v_{4t}, v_{4t+1}) = \frac{5i+7}{4} + 5m - \frac{5i-1}{4} + 5m - \frac{5(i+2)+1}{4} + \frac{5(i+1)}{4} = 10m.$$

定理 2 由 m 个同向有向圈 \vec{C}_4 通过相对两个顶点重合而构成的有向图(这里记作 $\cdot \vec{C}_{4,m} \cdot$) 是优美的.

证明 由图 2 知, 图 $\cdot \vec{C}_{4,m} \cdot$ 中有 m 个有向圈 \vec{C}_4 , 第 i 个有向圈 $\vec{C}_4^{(i)}$ 的顶点依次为 $x_i x_0 x_{2m+1-i} y_0$, 易得 $q = 4m$. 再令

$$f(x_0) = 0, f(y_0) = 2m, f(x_i) = 2i - 1, i = 1, 2, \dots, m.$$

易证 f 为有向图 $\cdot \vec{C}_{4,m} \cdot$ 的优美标号, 即 $\cdot \vec{C}_{4,m} \cdot$ 是优美图.

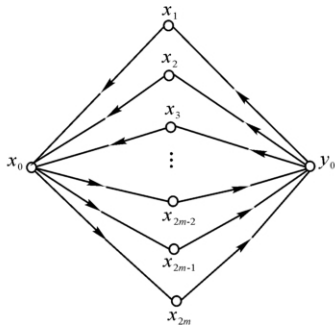


图 2 有向图 $\cdot \vec{C}_{4,m} \cdot$

性质 2 对于任意正整数 m , 优美有向图 $\cdot \vec{C}_{4,m} \cdot$ 中任一有向圈 $\vec{C}_4^{(i)}$ 的弧优美值之和均为 $8m + 2$.

定理 3 将两个有向图 $\cdot \vec{C}_{4,m} \cdot$ 入度为 m 的一个顶点与另一个 $\cdot \vec{C}_{4,m} \cdot$ 入度为 m 的一个顶点, 通过两个公共顶点粘合而成的图(图 3, 这里记作

$2 \cdot \vec{C}_{4,m} \cdot$) 是优美的.

证明 图 $2 \cdot \vec{C}_{4,m} \cdot$ 左侧是 m 个有向圈 \vec{C}_4 , 且第 i 个 $\vec{C}_4^{(i)}$ 顶点为 $x_i y_0 x_{2m+1-i} y_1$, 右侧也是 m 个有向圈 \vec{C}_4 , 且第 i 个 $\vec{C}_4^{(i)}$ 顶点为 $x_{2m+i} y_1 x_{4m+1-i} y_2$, 易得 $q = 8m$. 令

$$f(y_0) = 0, f(y_1) = m, f(y_2) = 2m, f(x_i) = 8m + 1 - i, i = 1, 2, 3, \dots, 4m.$$

易证 f 为有向图 $2 \cdot \vec{C}_{4,m} \cdot$ 的优美标号, 即 $2 \cdot \vec{C}_{4,m} \cdot$ 是优美图.

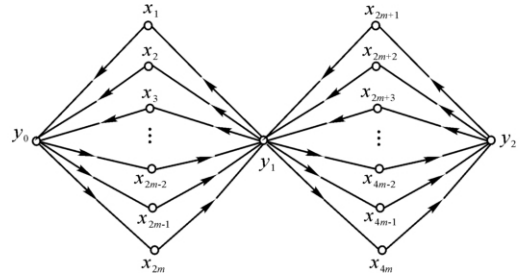


图 3 有向图 $2 \cdot \vec{C}_{4,m} \cdot$

性质 3 对于任意正整数 m , 优美有向图 $2 \cdot \vec{C}_{4,m} \cdot$ 中任一有向圈 $\vec{C}_4^{(i)}$ 的弧优美值之和均为 $16m + 2$.

参考文献:

[1] Golomb S W. How to number a graph in Graph Theory and Computing[M]. New York: Academic Press, 1972.
 [2] 马克杰. 优美图[M]. 北京: 北京大学出版社, 1991.
 [3] Gallian, Joseph A. A dynamic survey of graph labeling [J]. The Electronic Journal of Combinatorics, Mol Biol, 2005, 5: 1-148

(责任编辑: 尹 闯)

科学家攻克磁共振成像新技术

微神经纤维以微电子信号的形式传递信息, 脑白质就是由数以十亿计的微神经纤维所构成。每个神经纤维都由一种叫髓磷脂的脂肪物质包裹着, 从而能够提高这些电子信号的行进速度。利用髓磷脂分子结构方面的知识, 英国物理学家发明了一种新的磁共振成像技术生成图像模型。模型中用又长又细而且带有特殊(具有各向异性的)磁性的空心管代表神经纤维。此模型解释了图像对比取决于脑白质中的纤维取向, 并且也具有从磁共振图像中推断出神经纤维的尺寸、方向等信息的潜力。利用该模型对健康志愿者进行的扫描实验以及由此制作的髓鞘模型都显示, 利用相当简单的成像技术即可生成尺寸、方向等更为具体的神经纤维微观信息, 能够方便地观察神经纤维。这项新技术有望提高多发性硬化症等脑部疾病的诊断率和监测效果。

(据科学网)