广西科学院学报 2012,28(3):185~186
Journal of Guangxi Academy of Sciences Vol. 28, No. 3 August 2012

正项级数比较判别法的一个推广

A Promotion of Comparison Test on Series of Positive Terms

庞 通
PANG Tong

(广西机电职业技术学院,广西南宁 530007)
(Technical College in Guangxi, Nanning, Guangxi, 530007, China)

摘要:对正项级数常用比较判别法进行推广,证明比较判别法具有一般性.

关键词:正项级数 比较判别法 敛散性

中图法分类号:O173 **文献标识码**:A **文章编号**:1002-7378(2012)03-0185-02

Abstract: Comparison test for series of positive terms is promoted, which is proved to be generality.

Key words: series of positive terms, comparison test, convergence

文献[1]和文献[2]给出了最常用比较判别法的相关结论:

(1)给定两个正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$,并且 $a_n \leqslant b_n, n=1,2,\cdots$,

(i)若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛,则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 也收敛;

(ii)若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散,则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 也发散.

(2)给定两个正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$,若

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = k, 0 < k < +\infty, b_n \neq 0,$$

则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 的敛散性相同.

(3)给定两个正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$,且从某个自然数 N 开始,当 $n > N$ 时,$\frac{a_{2n}}{a_n} \leqslant \frac{b_{2n}}{b_n}$ 与 $\frac{a_{2n+1}}{a_{n+1}} \leqslant \frac{b_{2n+1}}{b_{n+1}}$ 成立,则有

(i)若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛,则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 也收敛;

(ii)若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散,则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 也发散.

(4)给定正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$,若 $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{2n}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{2n+1}}{a_{n+1}} = \rho$,则有

(i)当 $\rho < \frac{1}{2}$ 时,级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛;

(ii)当 $\rho > \frac{1}{2}$ 时,级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

显然(2)是(1)的推论,(4)是(3)的推论,(3)是(1)的推广.本文对上述结论作进一步的推广,使比较判别法具有更一般的形式。

定理 设有两个正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$,若存在自然数 N,当 $n > N$ 时,下列不等式成立

$$\frac{a_{kn}}{a_n} \leqslant \frac{b_{kn}}{b_n}, \frac{a_{kn+1}}{a_{n+1}} \leqslant \frac{b_{kn+1}}{b_{n+1}}, \cdots, \frac{a_{kn+n-1}}{a_{n+k-1}} \leqslant \frac{b_{kn+n-1}}{b_{n+k-1}}, k \geqslant 2, k \in N,$$

则(1)若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛,则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 也收敛;(2)若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散,则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 也发散.

证明 由已知条件不难得到不等式

收稿日期:2012-06-11
修回日期:2012-07-12
作者简介:庞 通(1963-),男,讲师,主要从事高等数学教学与研究。

$$\frac{a_{kn+i}}{b_{kn+i}} \leqslant \frac{a_{n+i}}{b_{n+i}}, \ i=0,1,2,\cdots,\ k-1.$$

当 $n > N$ 时,取 $p=kN$,且令 $M=\max\limits_{N\leqslant i<p}\left\{\frac{a_i}{b_i}\right\}$.

若 $N\leqslant n<p$,则有 $\frac{a_n}{b_n}\leqslant \max\limits_{N\leqslant i<p}\left\{\frac{a_i}{b_i}\right\}=M$. 若 $n\geqslant p$,则必存在自然数 n_1,使得 $n=kn_1+i_1\geqslant p=kN$,$i_1=0,1,2,\cdots,k-1,k\in N$,并且 $n_1+i_1\geqslant N$. 若 $n_1+i_1<p$,则有 $\frac{a_n}{b_n}=\frac{a_{kn_1+i_1}}{b_{kn_1+i_1}}\leqslant\frac{a_{n_1+i_1}}{b_{n_1+i_1}}\leqslant M$. 若 $n_1+i_1\geqslant p$,则必存在自然数 n_2,使得 $n_1+i_1=kn_2+i_2$,并且 $n_2+i_2\geqslant N$. 若 $n_2+i_2<p$,则有 $\frac{a_n}{b_n}=\frac{a_{kn_1+i_1}}{b_{kn_1+i_1}}\leqslant\frac{a_{n_1+i_1}}{b_{n_1+i_1}}=\frac{a_{kn_2+i_2}}{b_{kn_2+i_2}}\leqslant\frac{a_{n_2+i_2}}{b_{n_2+i_2}}\leqslant M$,若 $n_2+i_2>p$,则继续推理下去,假设经过第 m 步满足条件,则必存在自然数 n_m,使得 $n_m+i_m<p$,于是有

$$\frac{a_n}{b_n}=\frac{a_{kn_1+i_1}}{b_{kn_1+i_1}}\leqslant\frac{a_{n_1+i_1}}{b_{n_1+i_1}}=\frac{a_{kn_2+i_2}}{b_{kn_2+i_2}}\leqslant\frac{a_{n_2+i_2}}{b_{n_2+i_2}}\leqslant\cdots\leqslant\frac{a_{n_m+i_m}}{b_{n_m+i_m}}\leqslant M.$$

所以 $a_n\leqslant Mb_n$,再由已知的比较判别法及级数的性质可知,定理成立.

推论 给定正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$,若 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{kn}}{a_n}=\rho_1$,$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{kn+1}}{a_{n+1}}=\rho_2,\cdots,\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{kn+k-1}}{a_{n+k-1}}=\rho_k$,则(1)当 $\rho=\max\{\rho_1,\rho_2,\cdots,\rho_k\}<\frac{1}{k}$ 时,级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛;

(2)当 $\rho=\min\{\rho_1,\rho_2,\cdots,\rho_k\}>\frac{1}{k}$ 时,级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散.

证明 (1)当 $\rho<\frac{1}{k}$ 时,令 $s=\frac{1}{2}(\rho+\frac{1}{k})\in(\rho,\frac{1}{k})$,则存在实数 $r>1$,使得 $s<\frac{1}{k^r}<\frac{1}{k}$. 又令 $b_n=\frac{1}{n^r}$,因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{kn}}{a_n}=\rho_1\leqslant\rho<s<\frac{1}{k^r}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{1}{kn}}{\frac{1}{n}}\right)^r=\lim_{n\to\infty}\frac{b_{kn}}{b_n},$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{kn+1}}{a_{n+1}}=\rho_2\leqslant\rho<s<\frac{1}{k^r}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{1}{kn+1}}{\frac{1}{n+1}}\right)^r=\lim_{n\to\infty}\frac{b_{kn+1}}{b_{n+1}},\cdots,\lim_{n\to\infty}\frac{a_{kn+k-1}}{a_{n+k-1}}=\rho_k\leqslant\rho<s<\frac{1}{k^r}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{1}{kn+k-1}}{\frac{1}{n+k-1}}\right)^r=\lim_{n\to\infty}\frac{b_{kn+k-1}}{b_{n+k-1}}.$$

于是存在实数 $N_0>0$,当 $k>N_0$ 时,有

$$\frac{a_{kn}}{a_n}\leqslant\frac{b_{kn}}{b_n},\frac{a_{kn+1}}{a_{n+1}}\leqslant\frac{b_{kn+1}}{b_{n+1}},\cdots,\frac{a_{kn+n-1}}{a_{n+k-1}}\leqslant\frac{b_{kn+n-1}}{b_{n+k-1}},k\geqslant 2,k\in N.$$

又由于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛,所以由定理可知,级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

(2)当 $\rho>\frac{1}{k}$ 时,令 $b_n=\frac{1}{n}$,因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{kn}}{a_n}=\rho_1\geqslant\rho>\frac{1}{k}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{kn}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{b_{kn}}{b_n},$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{kn+1}}{a_{n+1}}=\rho_2\geqslant\rho>\frac{1}{k}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{kn+1}}{\frac{1}{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{b_{kn+1}}{b_{n+1}},$$

$\cdots$,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{kn+k-1}}{a_{n+k-1}}=\rho_k\geqslant\rho>\frac{1}{k}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{kn+k-1}}{\frac{1}{n+k-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{b_{kn+k-1}}{b_{n+k-1}}.$$

于是存在实数 $N_0>0$,当 $k>N_0$ 时,有

$$\frac{a_{kn}}{a_n}\geqslant\frac{b_{kn}}{b_n},\frac{a_{kn+1}}{a_{n+1}}\geqslant\frac{b_{kn+1}}{b_{n+1}},\cdots,\frac{a_{kn+n-1}}{a_{n+k-1}}\geqslant\frac{b_{kn+n-1}}{b_{n+k-1}},k\geqslant 2,k\in N.$$

又由于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 发散,所以由定理可知,级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散.

参考文献:

[1] 赵显增. 微积分教程:下册[M]. 南京:东南大学出版社,2002.

[2] 李铁烽. 正项级数判别收敛的一种新的比值判别法[J]. 数学通报,1990(1):46-47.

[3] 刘玉琏. 数学分析讲义练习题选解[M]. 北京:高等教育出版社,1996.

(责任编辑:尹 闯)