图 $w_n * p_k$ 的优美性
Graceful Graph of $w_n * p_k$

黄立强
HUANG Li-qiang

(广西国际商务职业技术院,广西南宁　530007)
(Guangxi International Business Vocational College, Nanning, Guangxi, 530007, China)

摘要:提出图 $w_n * p_k$ 的概念,并在 $n\equiv 0(\mathrm{mod}\ 2)$ 且 $n\geqslant 4$,$k\equiv 1(\mathrm{mod}\ 2)$,$k\equiv 0(\mathrm{mod}\ 2)$ 和 $n\equiv 1(\mathrm{mod}\ 2)$ 且 $n\geqslant 5$,$k\equiv 1(\mathrm{mod}\ 2)$,$k\equiv 0(\mathrm{mod}\ 2)$ 时,证明图 $w_n * p_k$ 是优美的.

关键词:优美图　轮图　标号

中图法分类号:O157.5　**文献标识码**:A　**文章编号**:1002-7378(2012)02-0106-04

Abstract: The notion of $w_n * p_k$ is introduced. Then, when $n\equiv 0(\mathrm{mod}\ 2) n\geqslant 4, k\equiv 1(\mathrm{mod}\ 2), k\equiv 0(\mathrm{mod}\ 2)$ and $n\equiv 1(\mathrm{mod}\ 2) n\geqslant 5, k\equiv 1(\mathrm{mod}\ 2), k\equiv 0(\mathrm{mod}\ 2) w_n * p_k$ is proved to be an graceful graph.

Key words: graceful graph, wheel graph, labeling

1967 年,Rosa 首次提出图的优美标号,随后图的优美性引起了许多学者的关注,经过几十年的研究,图的优美标号已经取得较多的成果[1~6].基于文献[7,8]中轮图的优美性,本文先提出图 $w_n * p_k$ 的概念,再证明,当 $n\equiv 0(\mathrm{mod}\ 2)$ 且 $n\geqslant 4$,$k\equiv 1(\mathrm{mod}\ 2)$,$k\equiv 0(\mathrm{mod}\ 2)$ 和 $n\equiv 1(\mathrm{mod}\ 2)$ 且 $n\geqslant 5$,$k\equiv 1(\mathrm{mod}\ 2)$,$k\equiv 0(\mathrm{mod}\ 2)$ 时,图 $w_n * p_k$ 是优美的.

1　基本定义

定义 1[3]　对于一个 q 条边的简单图 $G=(V,E)$,如果存在一个单射 $f:V(G)\to\{0,1,2,\cdots,q\}$,使得对所有的边 $e=\{uv\}\in E(G)$,由 $f*(uv)=|f(u)-f(v)|$ 导出 $E(G)\to\{1,2,3,\cdots,q\}$ 是一个一一对应,则称 G 是优美图,f 是 G 的优美标号,或优美值.

定义 2　由顶点度数为 n 的轮图 w_n 的顶点与长度为 k 的路 p_k 的一端的顶点粘接在一起所得到的图称为蘑菇图,记作图 $w_n * p_k$.

本文图论术语除特别说明外,均来自文献[9].

2　主要结果

定理 1　当 $n\equiv 1(\mathrm{mod}\ 2)$ 且 $n\geqslant 5$,$k\equiv 1(\mathrm{mod}\ 2)$ 时,图 $w_n * p_k$ 是优美图.

证明　因为在图 $w_n * p_k$ 中共有 $2n+k$ 条边,其中度数为 $n+1$ 的顶点记为 v_k.为方便叙述,规定图 $w_n * p_k$ 的顶点记号如图 1 所示.

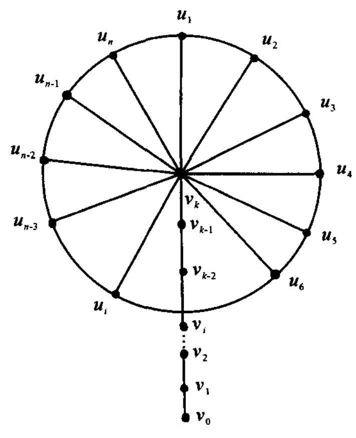

图 1　图 $\omega_n * p_k$

图 1 的顶点标号如下:

$$f(v_{2i-1})=i-1, i=1,2,3,\cdots,\frac{k+1}{2},$$

$$f(u_1)=f(v_k)+1=\frac{k+1}{2},$$

$$f(u_{2i-1})=f(u_1)+(i-1)\times 2=\frac{k-3}{2}+2i, i=$$

收稿日期:2011-04-20
修回日期:2012-02-10
作者简介:黄立强(1981-),男,助教,主要从事图论研究。

$1,2,3,\cdots,\frac{n-1}{2}$,

$f(u_{n-3})=f(u_{n-2})+4=\frac{k+3}{2}+n$,

$f(u_{2i})=f(u_2)+(i-1)\times(-2)=\frac{k-7}{2}+2n+(i-1)\times(-2)=\frac{k-3}{2}+2n-2i, i=1,2,3,\cdots,\frac{n-3}{2}$,

$f(u_{n-1})=f(u_2)+1, f(u_n)=f(u_{n-1})+2=f(u_2)+3$,

$f(v_{k-1})=f(u_n)+1=f(u_2)+4$,

$f(v_{2i})=f(v_0)+i\times(-1), i=0,1,2,3,\cdots,\frac{k-1}{2}$,

$f(u_2)=\frac{k-7}{2}+2n, f(v_0)=k+2n$.

再验证 f 是图 1 的一个优美标号.

因为 $f(v_{2i-1})=i-1$,而 $i=1,2,\cdots,\frac{k+1}{2}$,所以当 i 取遍 $1,2,3,\cdots,\frac{k+1}{2}$ 时,$f(v_{2i-1})$ 取遍 $0,1,2,3,\cdots,\frac{k-1}{2}$.

因为 $f(u_1)=f(v_k)+1=\frac{k+1}{2}-1+1=\frac{k+1}{2}$,$f(u_{2i-1})=f(u_1)+(i-1)\times 2=\frac{k+1}{2}+2i-2=\frac{k-3}{2}+2i$,所以当 i 取遍 $1,2,\cdots,\frac{n-1}{2}$ 时,$f(u_{2i-1})$ 取遍 $\frac{k+1}{2},\frac{k+5}{2},\cdots,\frac{k-3}{2}+n-1$.

因为 $f(u_{n-3})=f(u_{n-2})+4=\frac{k+3}{2}+n$,$f(u_{2i})=f(u_2)+(i-1)\times(-2)=\frac{k-3}{2}+2n-2i$,所以当 i 取遍 $1,2,3,\cdots,\frac{n-3}{2}$ 时,$f(u_{2i})$ 取遍 $\frac{k-7}{2}+2n,\frac{k-11}{2}+2n,\cdots,\frac{k+3}{2}+n$.

因为 $f(u_{n-1})=f(u_2)+1=\frac{k-7}{2}+2n+1=\frac{k-5}{2}+2n$,而 $f(u_n)=f(u_2)+3=\frac{k-7}{2}+2n+3=\frac{k-1}{2}+2n$,$f(v_{k-1})=f(u_2)+4=\frac{k+1}{2}+2n$,$f(v_{2i})=f(v_0)-i=k+2n-i$,所以当 i 取遍 $0,1,2,3,\cdots,\frac{k-1}{2}$ 时,$f(v_{2i})$ 取遍 $k+2n,k+2n-1,k+2n-2,\cdots,\frac{k+1}{2}+2n$,显然 $f:V(G)\rightarrow\{0,1,2,\cdots,q\}$ 是一个单射.

因为 u_{2i} 与 u_{2i-1},u_{2i+1} 相邻,而 $f*(u_{2i}u_{2i-1})=|f(u_{2i})-f(u_{2i-1})|=2n-4i$,$f*(u_{2i}u_{2i+1})=|f(u_{2i})-f(u_{2i+1})|=2n-4i-2$,其中 $i=1,2,3,\cdots,\frac{n-3}{2}$,所以当 i 取遍 $1,2,3,\cdots,\frac{n-3}{2}$ 时,$f*(u_{2i}u_{2i-1})$ 和 $f*(u_{2i}u_{2i+1})$ 取遍 $2n-4,2n-6,2n-8,2n-10,\cdots,6,4$.

因为 u_{n-1} 与 u_n 相邻,u_{n-1} 与 u_{n-2} 相邻,所以 $f*(u_{n-2}u_{n-1})=|f(u_{n-2})-f(u_{n-1})|=n$,$f*(u_nu_{n-1})=|f(u_n)-f(u_{n-1})|=2$.

因为 v_k 与 u_{2i} 相邻,而 $f*(v_ku_{2i})=|f(v_k)-f(u_{2i})|=2n-2i-1$,所以当 i 取遍 $1,2,3,\cdots,\frac{n-3}{2}$ 时,$f*(v_ku_{2i})$ 取遍 $2n-3,2n-5,\cdots,n+2$.

因为 v_k 与 u_{2i-1} 相邻,而 $f*(v_ku_{2i-1})=|f(v_k)-f(u_{2i-1})|=2i-1$,所以当 i 取遍 $1,2,3,\cdots,\frac{n-1}{2}$ 时,$f*(v_ku_{2i-1})$ 取遍 $1,3,5,\cdots,n-2$.

因为 v_{2i} 与 v_{2i-1},v_{2i+1} 相邻,而 $f*(v_{2i-1}v_{2i})=|f(v_{2i-1})-f(v_{2i})|=k+2n+1-2i$,$f*(v_{2i+1}v_{2i})=|f(v_{2i+1})-f(v_{2i})|=k+2n-2i$,所以当 i 取遍 $1,2,3,\cdots,\frac{k-1}{2}$ 时,$f*(v_{2i-1}v_{2i})$ 与 $f*(v_{2i+1}v_{2i})$ 取遍 $k+2n-2,k+2n-1,\cdots,2n+1,2n+2$.

因为 v_0 与 v_1 相邻,而 $f(v_0)=k+2n$,$f(v_1)=0$,所以 $f*(v_0v_1)=|f(v_0)-f(v_1)|=k+2n$.

所以由 $f*$ 导出了 $E(G)\rightarrow\{1,2,3,\cdots,|E|\}$ 的一个一一对应.所以 f 是图 w_n*p_k 的一个优美标号,从而图 w_n*p_k 是一个优美图.

定理 2　当 $n\equiv 1(\bmod 2)$ 且 $n\geqslant 5$,$k\equiv 0(\bmod 2)$ 时,图 w_n*p_k 是优美图.

证明　规定图 w_n*p_k 的顶点记号同样如图 1 所示.给出图 w_n*p_k 的顶点标号如下:

$f(v_{2i})=i, i=0,1,2,3,\cdots,\frac{k}{2}$,

$f(u_1)=f(v_k)+1=\frac{k+2}{2}$,

$f(u_{2i-1})=f(u_1)+(i-1)\times 2=\frac{k-2}{2}+2i, i=1,2,3,\cdots,\frac{n-1}{2}$,

$f(u_{n-3})=f(u_{n-2})+4=\frac{k+4}{2}+n, f(u_{2i})=$

$f(u_2)+(i-1)\times(-2), i=1,2,3,\cdots,\frac{n-3}{2}$,

$f(u_{n-1})=f(u_2)+1, f(u_n)=f(u_{n-1})+2=f(u_2)+3$,

$f(v_{k-1})=f(u_n)+1=f(u_2)+4, f(u_2)=\frac{k-6}{2}+2n$,

$f(v_{2i-1})=f(v_1)+(i-1)\times(-1), i=1,2,3,\cdots,\frac{k}{2}$,

同理定理 1 可以验证 $f:V(G)\to\{0,1,2,\cdots,q\}$ 是一个单射．所以由 f 导出的 $f*:E(G)\to\{1,,2,3,\cdots,|E|\}$ 是一个一一对应，所以 f 是图 w_n*p_k 的一个优美标号，从而图 w_n*p_k 是一个优美图．

定理 3　当 $n\equiv0(\bmod 2)$ 且 $n\geqslant4, k\equiv1(\bmod 2)$ 时，图 w_n*p_k 是优美图．

证明　图 w_n*p_k 的顶点记号如图 1，顶点标号如下：

$f(v_{2i-1})=i-1, i=1,2,3,\cdots,\frac{k+1}{2}$,

$f(u_1)=f(v_k)+1=\frac{k+1}{2}$,

$f(u_{2i-1})=f(u_1)+(i-1)\times2=\frac{k-3}{2}+2i, i=1,2,3,\cdots,\frac{n-2}{2}$,

$f(u_{n-2})=f(u_{n-3})+4=\frac{k+1}{2}+n$,

$f(u_{2i})=f(u_2)+(i-1)\times(-2), i=1,2,3,\cdots,\frac{n-2}{2}$,

$f(u_{n-1})=f(v_k)+2=\frac{k+3}{2}, f(u_n)=f(u_2)+3$,

$f(v_{k-1})=f(u_n)+1=f(u_2)+4$,

$f(v_{2i})=f(v_0)+i\times(-1), i=0,1,2,3,\cdots,\frac{k-1}{2}$,

$f(u_2)=\frac{k-7}{2}+2n, f(v_0)=k+2n$.

再验证 f 是图 1 的一个优美标号．

因为 $f(v_{2i-1})=i-1$，而 $i=1,2,\cdots,\frac{k+1}{2}$，所以当 i 取遍 $1,2,3,\cdots,\frac{k+1}{2}$ 时，$f(v_{2i-1})$ 取遍 $0,1,2,3,\cdots,\frac{k-1}{2}$．

因为 $f(u_1)=f(v_k)+1=\frac{k+1}{2}-1+1=\frac{k+1}{2}$，$f(u_{2i-1})=f(u_1)+(i-1)\times2=\frac{k+1}{2}+2i-2=\frac{k-3}{2}+2i$，所以当 i 取遍 $1,2,\cdots,\frac{n-2}{2}$ 时，$f(u_{2i-1})$ 取遍 $\frac{k+1}{2},\frac{k+5}{2},\cdots,\frac{k-3}{2}+n-2$．

因为 $f(u_{n-2})=f(u_{n-3})+4=\frac{k+1}{2}+n$，$f(u_{2i})=f(u_2)+(i-1)\times(-2)=\frac{k-7}{2}+2n+2-2i$，当 i 取遍 $1,2,3,\cdots,\frac{n-2}{2}$ 时，$f(u_{2i})$ 取遍 $\frac{k+1}{2}+2n-4,\frac{k+1}{2}+2n-6,\cdots,\frac{k+1}{2}+n$．

因为 $f(u_{n-1})=f(v_k)+2=\frac{k-1}{2}+2=\frac{k+3}{2}$，$f(u_n)=f(u_2)+3=\frac{k-7}{2}+2n+3$，$f(v_{k-1})=f(u_n)+1=f(u_2)+4=\frac{k-7}{2}+2n+4$，而 $f(v_{2i})=f(v_0)-i=k+2n-i$，所以当 i 取遍 $0,1,2,3,\cdots,\frac{k-1}{2}$ 时，$f(v_{2i})$ 取遍 $k+2n,k+2n-1,k+2n-2,\cdots,\frac{k+1}{2}+2n$．

综上所述 $f:V(G)\to\{0,1,2,\cdots,q\}$ 是一个单射．

又因为 u_{2i} 与 u_{2i-1},u_{2i+1} 相邻，而 $f*(u_{2i}u_{2i-1})=|f(u_{2i})-f(u_{2i-1})|=2n-4i$，其中 $i=1,2,3,\cdots,\frac{n-2}{2}$，所以当 i 取遍 $1,2,3,\cdots,\frac{n-2}{2}$ 时，$f*(u_{2i}u_{2i-1})$ 取遍 $2n-4,2n-8,\cdots,4$．

因为 $f*(u_{2i}u_{2i+1})=|f(u_{2i})-f(u_{2i+1})|=2n-4i-2$，其中 $i=1,2,3,\cdots,\frac{n-4}{2}$，所以当 i 取遍 $1,2,3,\cdots,\frac{n-4}{2}$ 时，$f*(u_{2i}u_{2i+1})$ 取遍 $2n-6,2n-10,\cdots,6$．

因为 u_{n-1} 与 u_n 相邻，u_{n-1} 与 u_{n-2} 相邻，所以 $f*(u_{n-2}u_{n-1})=|f(u_{n-2})-f(u_{n-1})|=n-1$，$f*(u_nu_{n-1})=|f(u_n)-f(u_{n-1})|=2n-2$．

因为 v_k 与 u_{2i} 相邻，而 $f*(v_ku_{2i})=|f(v_k)-f(u_{2i})|=2n-2i-1$，所以当 i 取遍 $1,2,3,\cdots,\frac{n-2}{2}$ 时，$f*(v_ku_{2i})$ 取遍 $2n-3,2n-5,\cdots,n+1$．

因为 v_k 与 u_{2i-1} 相邻，而 $f*(v_ku_{2i-1})=|f(v_k)-f(u_{2i-1})|=2i-1$，所以当 i 取遍 $1,2,3,\cdots,\frac{n-2}{2}$

时，$f*(v_k u_{2i-1})$ 取遍 $1,3,5,\cdots,n-3$.

因为 v_{2i} 与 v_{2i-1}, v_{2i+1} 相邻，而 $f*(v_{2i-1}v_{2i}) = |f(v_{2i-1}) - f(v_{2i})| = k+2n+1-2i, f*(v_{2i+1}v_{2i}) = |f(v_{2i+1}) - f(v_{2i})| = k+2n-2i$，所以当 i 取遍 $1,2,3,\cdots,\frac{k-1}{2}$ 时，$f*(v_{2i-1}v_{2i})$ 与 $f*(v_{2i+1}v_{2i})$ 取遍 $k+2n-1, k+2n-2, \cdots, 2n+2, 2n+1$.

因为 v_0 与 v_1 相邻，而 $f(v_0) = k+2n, f(v_1) = 0$，所以 $f*(v_0v_1) = |f(v_0) - f(v_1)| = k+2n$.

所以由 $f*$ 导出了 $E(G) \to \{1,,2,3,\cdots,|E|\}$ 的一个一一对应，所以 f 是图 $w_n * p_k$ 的一个优美标号，从而图 $w_n * p_k$ 是一个优美图.

定理 4 当 $n \equiv 0 (\bmod 2)$ 且 $n \geqslant 4, k \equiv 0 (\bmod 2)$ 时，图 $w_n * p_k$ 是优美图.

证明 基于图 1 给出图 $w_n * p_k$ 的顶点标号.

$f(v_{2i}) = i, i = 0,1,2,3,\cdots,\frac{k}{2}$,

$f(u_1) = f(v_k) + 1 = \frac{k+2}{2}$

$f(u_{2i-1}) = f(u_1) + (i-1) \times 2 = \frac{k-2}{2} + 2i, i = 1,2,3,\cdots,\frac{n-2}{2}$,

$f(u_{n-2}) = f(u_{n-3}) + 4 = \frac{k+2}{2} + n$,

$f(u_{2i}) = f(u_2) + (i-1) \times (-2), i = 1,2,3,\cdots,\frac{n-2}{2}$,

$f(u_{n-1}) = f(v_k) + 2 = \frac{k}{2} + 2, f(u_n) = f(u_2) + 3$,

$f(v_{k-1}) = f(u_n) + 1 = f(u_2) + 4$,

$f(v_{2i-1}) = f(v_1) + (i-1) \times (-1), i = 1,2,3,\cdots,\frac{k}{2}$.

同理可以验证图 $w_n * p_k$ 是一个优美图.

参考文献：

[1] Gallian A. A guide to the graph labeling zoo[J]. Discrete Applied Mathematics, 1994(49): 213-229.

[2] Frank Hsu D. Harmonious labelings of windmill graphs and related gradphs[J]. Journal of Graph Theory, 1982, 6(1): 85-87.

[3] 马克杰. 优美图[M]. 北京：北京大学出版社，1991.

[4] 容青，熊冬春. $P_{2r,b}$ 图的优美性[J]. 系统科学与数学 2010, 30(5): 703-709.

[5] 吴跃生. 关于圈 C_{4h} 的 $(r_1, r_2, \cdots, r_{4h})$-冠的优美性[J]. 2011, 28(1): 77-80.

[6] 王涛，刘海生，李德明. 和轮图相关图的优美性[J]. 中山大学学报，2011, 50(6): 16-19.

[7] Frucht R. Graceful numbering of wheels and related graphs[J]. Annals New York Academy of Sciences, 1979, 319: 219-229.

[8] Hoede C, Kuiper H. All wheels are graceful[J]. Utilitas Math, 1978, 14: 311.

[9] J A 邦迪，U S R 墨蒂. 图论及其应用[M]. 吴望名，译. 北京：科学出版社，1984.

（责任编辑：尹 闯）

搜索算法有助发现肿瘤标志物

肿瘤临床治疗和肿瘤研究过程要找到肿瘤标志物需要经过大量的实验，不但费时而且费力。同时还存的另外一个问题是，在不同的研究中所发现的标志物总是各不相同，无法相互印证。最近，德国德累斯顿工业大学的研究人员发现这与搜索引擎在处理大量重复网页和超链接时所遇到问题颇有几分类似。于是他们对谷歌网页排名算法进行改造，按与胰腺癌的相关性对 2 万个蛋白质进行排序，结果从中发现了 7 个肿瘤标志物。这些生物标志物可以帮助医生对癌症早期的体液或由手术中所获得的活体组织进行检查，以确定患者是否需要接受化疗。这些标志物除了可以帮助医生对患者的病情作出准确诊断治疗外，还能帮助研究人员据此开发出新的抗癌药物，在临床上具有重要价值。

目前这些新的生物标志物看起来虽然比目前所使用的更多更全面，但是它们还需要经过进一步的研究和临床试验才能获得应用。

（据科学网）