广西科学院学报
Journal of Guangxi Academy of Sciences

2012,28(2):93～97
Vol. 28,No. 2 May 2012

有限群的半覆盖-远离及 X-半置换子群*
Emi-cover-avoiding and X-semipermutable Subgroups of Finite Groups

石向东[1],韦华全[2],黄杰山[3]
SHI Xiang-dong[1], WEI Hua-quan[2], HUANG Jie-shan[3]

(1. 梧州学院数理系,广西梧州 543002;2. 广西师范学院数学科学学院,广西南宁 530001;3. 南宁职业技术学院,广西南宁 530022)
(1. Departement of Mathematics and Physics, Wuzhou College, Wuzhou, Guangxi, 543002, China; 2. School of Mathematics Science, Guangxi Teacher's Education University, Nanning, Guangxi, 530001, China; 3. Nanning College for Vocational Technology, Nanning, Guangxi, 530022, China)

摘要:研究某些 Sylow 子群的极大子群或二次极大子群的半覆盖-远离性或 X - 半置换性对有限群的 p - 幂零性的影响,得到有限群成为 p - 幂零群的几个充分和必要条件.

关键词:有限群 Sylow 子群 p - 幂零群 半覆盖 - 远离子群 X - 半置换
中图法分类号:O152 **文献标识码**:A **文章编号**:1002-7378(2012)02-0093-05

Abstract: The influence of semi-cover-avoiding and X - semipermutable properties of maximal and 2-maximal subgroups of some Sylow subgroups on the p - nilpotency of finite groups are investigated. Some sufficient and necessary conditions for a finite group to be p - nilpotent are obtained.

Key words: finite group, Sylow subgroup, p - nilpotent group, semi-cover-avoiding subgroup, X - semipermutable subgroup

近年来,利用子群的各种特性研究群的结构是群论工作者感兴趣的课题.半覆盖-远离性及 X - 半置换性是子群的两种重要的特性,已成为了群论研究的热点之一.2006 年文献[1]引入子群的半覆盖 - 远离性,并利用该性质给出群为 p - 可解、可解和超可解的若干判别条件.此后,一些作者也利用子群的半覆盖 - 远离性得到有限群结构的若干刻画[2~4].子群的 X - 半置换性是由郭文彬等[5]于 2007 年引入的.他们利用子群的 X - 半置换性得到了有限群成为幂零群和超可解群等的若干充分和必要条件.子群的 X - 半置换性是子群置换性(拟正规性)、弱拟正规性和半正规性的统一推广.

本文继续研究子群的半覆盖 - 远离性和 X - 半置换性对有限群结构的影响.首先,给出两个例子,说明半覆盖 - 远离性与 X - 半置换是两个独立的概念.其次,探讨某些 Sylow 子群的极大子群或二次极大子群的半覆盖 - 远离性或 X - 半置换性对有限群的 p - 幂零性的影响,得到有限群成为 p - 幂零群的几个充分和必要条件,推广了若干已知的结果.

文中之群皆指有限群,$F_p(G)$ 表示群 G 的 p - Fitting 子群,其他所用术语和符号都是标准的.称群 G 为与 A_4 无关,如果 G 的任一子群的商群都不与 A_4 同构.

1 定义及引理

设 H 是群 G 的一个子群,M/N 为 G 的一个正规因子.若 $MH=NH$,则称 H 覆盖 M/N;若 $H\cap M=H\cap N$,则称 H 远离 M/N;若 H 或覆盖或远离 G 的每个主因子,则称 H 具有覆盖 - 远离性质,也称

收稿日期:2011-12-14
修回日期:2012-01-08
作者简介:石向东(1961-),男,讲师,主要从事微分方程研究。
* 国家自然科学基金项目(10961007,11161006),广西自然科学基金项目(0991101),广西教育厅科研基金项目资助。

H 为 G 的 CAP - 子群[1].

定义 1.1[1] 设 H 是群 G 的一个子群. 如果存在 G 的一个主群列 $1=G_0<G_1<\cdots<G_l=G$,使得对每个 $i=1,\cdots,l$,H 或者覆盖 G_i/G_{i-1} 或者远离 G_i/G_{i-1},则称 H 具有半覆盖 - 远离性.

定义 1.2[5] 设 X 是群 G 的一个非空子集. G 的一个子群 A 叫做在 G 中 X - 半置换,如果存在 G 的子群 T 使得 $G=AT$ 且对于 T 的任意子群 T_1,存在 $x\in X$ 使得 $AT_1^x=T_1^xA$.

注 1.1 半覆盖 - 远离性与 X - 半置换是两个独立的概念. 例如:

(1) 设 $G=A_4$,$A\in \mathrm{Syl}_3(G)$. 则 A 覆盖或者远离 G 的主群列 $1<G_1<G$,其中 $G_1\in \mathrm{Syl}_2(G)$,故 A 在 G 中半覆盖 - 远离. 但对于 G 的任意非空子集 X,A 不在 G 中 X - 半置换,否则 G 中有 6 阶子群,矛盾.

(2) 设 $G=A_5$,$T\in \mathrm{Syl}_5(G)$. 则 G 有一个子群 $A\simeq A_4$ 且 $G=AT$ 满足对于 T 的任意子群 T_1 有 $AT_1=T_1A$(事实上,$T_1=1$ 或 T),所以 A 在 G 中 X - 半置换($X=1$),但是显然 A 不在 G 中半覆盖 - 远离.

引理 1.1[1] 设 H 是群 G 的一个子群,$1<\cdots<N<\cdots<M<\cdots<G$ 是 G 的一个正规群列. 如果 H 覆盖(或者远离)M/N,则 H 覆盖(或者远离)这个正规群列的任何加细的介于 M 和 N 之间的正规因子.

引理 1.2[2] 设 N 是群 G 的正规子群,H 是 G 的半覆盖 - 远离子群. 如果下列条件之一成立,则 HN/N 是 G/N 的半覆盖 - 远离子群:

(a)$N\leqslant H$;(b)$(|H|,|N|)=1$.

引理 1.3[2] 设 H 是群 G 的半覆盖 - 远离子群. 如果 $H\leqslant K\leqslant G$,那么 H 是 K 的半覆盖 - 远离子群.

由文献[5],我们以 $X(A)$ 表示 A 在 G 中的补 T 的集合,使得对于任意 $T_1\leqslant T$,存在 $x\in X$ 使得 $AT_1^x=T_1^xA$. 这样 A 在 G 中 X - 半置换当且仅当 $X(A)\neq\varnothing$.

引理 1.4[5] 设 A,X 都是群 G 的子群. 则

(1) 若 $N<G$,A 在 G 中 X - 半置换且 $T\in X(A)$,则 AN/N 在 G/N 中 XN/N - 半置换且 $TN/N\in(XN/N)(AN/N)$;

(2) 若 A 在 G 中 X - 半置换,$A\leqslant D\leqslant G$ 且 $X\leqslant D$,则 A 在 D 中 X - 半置换;

(3) 若 A 在 G 中 X - 半置换,$X\leqslant D$,则 A 在 G 中 D - 半置换.

引理 1.5[6] 设 G 是 π - 可分群,$\bar{G}=G/O_\pi'(G)$. 则 $C_{\bar{G}}(O_\pi(\bar{G}))\leqslant O_\pi(\bar{G})$;特别地,若 $O_{\pi'}(G)=1$,则 $C_G(O_\pi(G))\leqslant O_\pi(G)$.

引理 1.6[7] 若 $N<G$,$U\leqslant G$ 且 $N\leqslant\Phi(U)$,则 $N\leqslant\Phi(G)$.

引理 1.7[8] 设 G 是群,p 是 $|G|$ 的一个素因子且 $(|G|,p-1)=1$. 则

(1) 若 N 是 G 的 p 阶正规子群,则 $N\leqslant Z(G)$;

(2) 若 G 有循环的 Sylow p - 子群,则 G 为 p - 幂零;

(3) 若 M 是 G 的指数为 p 的子群,则 M 在 G 中正规.

引理 1.8[7] 设 A,B 均为群 G 的子群,其中 $G\neq AB$ 且 $AB^g=B^gA$ 对一切 $g\in G$ 成立. 则 A 或 B 包含在一个异于 G 的正规子群之中.

引理 1.9[8] 设 H 是群 G 的正规子群并使得 G/H 为 p - 幂零,P 是 H 的 Sylow p - 子群. 若 $|P|\leqslant p^2$ 且下述条件之一满足,则 G 是 p - 幂零群:

(a)p 是 $|G|$ 的最小素因子且 G 与 A_4 无关;(b)$(|G|,p^2-1)=1$.

2 主要结果

定理 2.1 设 P 是群 G 的 Sylow p - 子群,其中 p 是 $|G|$ 的一个素因子且 $(|G|,p-1)=1$. 则 G 是 p - 幂零群当且仅当 P 的极大子群在 G 中半覆盖 - 远离或 $F_p(G)$ - 半置换.

证明 必要性. 设 G 是 p - 幂零群,K 为 G 的正规 p - 补,P_1 是 P 的极大子群. 显然,P_1 覆盖 P_1K/K 但远离 G/P_1K 及 $K_1/1$,所以 P_1 覆盖或远离 G 的正规列 $1\leqslant K\leqslant P_1K\leqslant G$ 的每个正规因子. 由引理 1.1 知,P_1 覆盖或远离由这个正规列加细而得到的 G 的主群列的每个主因子,即 P_1 在 G 中半覆盖 - 远离. 必要性得证.

充分性. 设 G 是极小阶反例并记 $X=F_p(G)$. 则

(1)$O_{p'}(G)=1$.

设 $N=O_{p'}(G)\neq 1$. 显然,$PN/N\in \mathrm{Syl}_p(G/N)$. 设 P_1N/N 是 PN/N 的一个极大子群,其中 P_1 是 P 的某个极大子群. 由题设,P_1 在 G 中半覆盖 - 远离或 X - 半置换,再由引理 1.2 及引理 1.4 知,P_1N/N 在 G/N 中半覆盖 - 远离或 XN/N - 半置换. 这样,G/N 满足定理的条件. 由 G 为极小阶反例得到 G/N 为 p - 幂零,从而 G 为 p - 幂零,矛盾.

(2) 若 $P\leqslant H<G$,则 H 为 p - 幂零群.

由(1)知,$X=F_p(G)=O_p(G)\leqslant F_p(H)$. 再由引理 1.3 及引理 1.4 知,$P$ 的极大子群在 H 中半覆盖 - 远离或 X - 半置换. 故 H 满足定理的条件,由 G

的选择知 H 为 p-幂零群.

(3)$O_p(G)=1$.

若否,设 N 是 G 的含于 $O_p(G)$ 的极小正规子群. 则 N 是初等交换 p-群. 由引理1.2及引理1.4易知 G/N 满足定理的条件,故由 G 的选择得 G/N 为 p-幂零群. 由于 p-幂零群类是饱和群系[7],可设 N 为 G 的含于 $O_p(G)$ 的唯一极小正规子群且 $N\not\subset\Phi(G)$. 于是存在 G 的极大子群 M 使得 $G=NM$ 且 $N\cap M=1$. 易知 $O_p(G)\cap M<G$,故 $O_p(G)\cap M=1$. 由此得到 $N=O_p(G)$. 因 G/N 为 p-幂零群,故 G 为 p-可解群,从而由引理1.5得 $C_G(N)=N$. 此外,存在 G 的 Sylow q-子群 Q 使得 $PQ\leqslant G$,其中 $q\neq p$. 若 $PQ<G$,则由(2)知 PQ 为 p-幂零群,从而 $Q\leqslant C_G(N)=N$,矛盾. 故 $G=PQ$. 由引理1.6知,存在 P 的极大子群 P_1 使得 $N\not\subset P_1$.

下面分两种情形讨论:

情形1. P_1 在 G 中半覆盖-远离. 此时,存在 G 的主群列 $1=G_0<G_1<\cdots<G_l=G$,使得对每个 i,P_1 覆盖或远离 G_i/G_{i-1}. 于是 $G_1P_1=P_1$ 或者 $G_1\cap P_1=1$. 若前者成立,则 $G_1\leqslant P_1$,当然 $G_1\leqslant N$,此时由 N 的唯一性知 $N=G_1\leqslant P_1$,这与 N 的取法矛盾. 故 $G_1\cap P_1=1$. 进一步,由(1)得 $|G_1\cap P|=p$. 由引理1.7知,G_1 为 p-幂零群. 设 T_1 是 G_1 的正规 p-补,则由 $T_1\,\mathrm{char}\,G_1<G$ 得 $T_1<G$,这样 $T_1=1$,即 $G_1=P\cap G_1=N$ 为 p 阶群. 再由引理1.7知,$N\leqslant Z(G)$,由 G/N 为 p-幂零得 G 为 p-幂零,矛盾.

情形2. P_1 在 G 中 X-半置换. 此时,存在 G 的子群 T 使得 $G=P_1T$ 且对于 T 的任意子群 T_1,存在 $x\in X$ 使得 $P_1T_1^x=T_1^xP_1$. 特别地,对于 $T_q\in\mathrm{Syl}_q(T)$ 有 $y\in X$ 使得 $P_1T_q^y=T_q^yP_1$. 因 $P_1<P$ 且 $y\in X=O_p(G)$,故 $P_1T_q=P_1^{y^{-1}}T_q=T_qP_1^{y^{-1}}=T_qP_1$,即 P_1T_q 成群. 这样 $P_1\cap N=P_1T_q\cap N<P_1T_q$. 但是 $P_1\cap N<P$,因而 $P_1\cap N<\langle P_1T_q,P\rangle=G$. 由 N 的极小正规性得 $P_1\cap N=1$. 因 $P=P_1N$,故 $|N|=p$. 类似上面的证明即导致矛盾.

(4) 反例不存在.

设 P_1 为 P 的极大子群. 首先,由引理1.7知,$P_1\neq 1$. 若 P_1 在 G 中半覆盖-远离,则存在 G 的一个主群列 $1=G_0<G_1<\cdots<G_l=G$,使得对每个 i,或者 P_1 覆盖 G_i/G_{i-1} 或者 P_1 远离 G_i/G_{i-1}. 因此,$G_1P_1=P_1$ 或者 $G_1\cap P_1=1$. 若前者成立,则 $1<G_1\leqslant P_1$,这与(3)矛盾. 故 $G_1\cap P_1=1$,进而 $|G_1\cap P|=p$. 由引理1.7知 G_1 为 p-幂零,再由(1)得 $G_1=P\cap G_1$,这与(3)矛盾. 故 P_1 在 G 中 X-半置换.

现设 N 是 G 的极小正规子群. 若 $NP<G$,则由(2)知,NP 为 p-幂零群; 特别地,N 为 p-幂零,这与(1)或(3)矛盾. 故 $NP=G$. 由(1)及(3)知,G 不可解,故 N 为非交换同构单群的直积. 另外,$X=O_p(G)=1$. 现由题设知,存在 G 的子群 T 使得 $G=P_1T$ 且对于 T 的任意子群 T_1,$P_1T_1=T_1P_1$. 于是对于任意 $g=ba\in G$,其中 $a\in P_1$,$b\in T$ 以及 T 的 Sylow q-子群 $T_q(q\neq p)$,$T_q^bP_1^{a^{-1}}=T_q^bP_1$ 是群,即 $T_q^gP_1$ 是群. 显然,$T_qP_1\neq G$,故由引理1.8知,G 中有包含 T_q 或 P_1 的真正规子群. 于是,G 非单从而 $P\cap N<P$. 因而可取 P_1 为 P 的包含 $P\cap N$ 的极大子群. 则 $P_1\cap N=P\cap N$. 利用上面的结果,对于任意 $n\in N$,$T_q^nP_1$ 是群. 显然,$T_q\leqslant N$,所以 $T_q^nP_1\cap N=T_q^n(P_1\cap N)=T_q^n(P\cap N)$. 然而,$T_q(P\cap N)\neq N$,再由引理1.8知,$N$ 中有包含 T_q 或 $P\cap N$(N 的 Sylow p-子群)的真正规子群 N_1. 但 N 为非交换同构单群的直积,故 N_1 也是 N 的若干直积因子的直积,这与 $T_q\leqslant N_1$ 或 $P\cap N\leqslant N_1$,矛盾. 定理证明完毕.

推论 2.1 设 H 是群 G 的正规子群并使得 G/H 为 p-幂零,P 是 H 的 Sylow p-子群,其中 p 是 $|G|$ 的一个素因子且 $(|G|,p-1)=1$. 若 P 的极大子群在 G 中半覆盖-远离或 $F_p(H)$-半置换,则 G 是 p-幂零群.

证明 由引理1.3,引理1.4及定理1.1知,H 为 p-幂零群. 设 K 为 H 的正规 p-补. 则 $K<G$. 显然,$(G/K)/(H/K)\cong G/H$ 为 p-幂零. 由引理1.2及引理1.4知,H/K 的极大子群在 G/K 中半覆盖-远离或 $F_p(H)N/N$-半置换. 所以,G/K 满足推论2.1的条件. 若 $K\neq 1$,则由归纳法知 G/K 为 p-幂零,从而 G 为 p-幂零. 若 $K=1$,则 $H=P$. 现设 T/H 为 G/H 的正规 p-补. 则 $T<G$ 且 P 是 T 的 Sylow p-子群. 由引理1.3及引理1.4知,P 的极大子群在 T 中半覆盖-远离或 p-半置换. 由定理1.1知 T 为 p-幂零群. 当然,T 的正规 p-补也是 G 的正规 p-补,即 G 是 p-幂零群. 证明完毕.

推论 2.2[2] 设 P 是群 G 的 Sylow p-子群,其中 p 是 $|G|$ 的最小素因子. 若 P 循环或 P 的极大子群在 G 中半覆盖-远离,则 G 是 p-幂零群.

推论 2.3[2] 设 H 是群 G 的正规子群并使得 G/H 为 p-幂零,P 是 H 的 Sylow p-子群,其中 p 是 $|G|$ 的最小素因子. 若 P 循环或 P 的极大子群在 G 中半覆盖-远离,则 G 是 p-幂零群.

定理 2.2 设 P 是群 G 的 Sylow p-子群,其中

p 是 $|G|$ 的一个素因子.如果 P 的二次极大子群在 G 中半覆盖-远离或 $F_p(G)$-半置换且下述条件之一成立,那么 G 是 p-幂零群:(a)p 是 $|G|$ 的最小素因子且 G 与 A_4 无关;(b)$(|G|,p^2-1)=1$.

证明 设定理不真,G 是极小阶反例并记 $X=F_p(G)$.则

(1)$O_{p'}(G)=1$.

设 $O_{p'}(G)\neq 1$.由引理1.2及引理1.4易知 $G/O_{p'}(G)$ 满足定理2.2的条件.由 G 为极小阶反例推出 $G/O_{p'}(G)$ 为 p-幂零,从而 G 为 p-幂零,矛盾.

(2)若 $P\leqslant H<G$,则 H 为 p-幂零群.

由(1)知,$X=F_p(G)=O_p(G)\leqslant F_p(H)$.利用引理1.3及引理1.4结果,$H$ 满足定理2.2的条件,再由 G 为极小阶反例,得 H 为 p-幂零群.

(3)$O_p(G)=1$.

若否,设 N 是 G 的含于 $O_p(G)$ 的极小正规子群.则 N 是初等交换 p-群.由引理1.2及引理1.4易知 G/N 满足定理2.2的条件,故由 G 的选择得 G/N 为 p-幂零.于是可设 N 是 G 的含于 $O_p(G)$ 的唯一极小正规子群且 $N\not\subset\Phi(G)$.易知 $N=O_p(G)$.因 G/N 为 p-幂零群,故 G 为 p-可解群,由引理1.5得 $C_G(N)=N$.此外,存在 $Q\in \mathrm{Syl}_q(G)$,其中 $q\neq p$,使得 $PQ\leqslant G$.若 $PQ<G$,则由(2)知 PQ 为 p-幂零群,从而 $Q\leqslant C_G(N)=N$,矛盾.故 $G=PQ$.由引理1.6知,$N\not\subset\Phi(P)$.这样就存在 P 的极大子群 P_1 使得 $N\not\subset P_1$.进一步,$P_1N=P$.下面分两种情形讨论:

情形1.$P_1\cap N<P_1$.取 P_1 的极大子群 P_2 使得 $P_1\cap N\leqslant P_2$.则 $P_1\cap N=P_2\cap N$.因 P_2 是 P 的二次极大子群,故 P_2 在 G 中半覆盖-远离或 X-半置换.若 P_2 在 G 中半覆盖-远离,则 P_2 覆盖或远离 G 的一个主群列 $1=G_0<G_1<\cdots<G_l=G$ 的每个主因子.所以,$G_1P_2=P_2$ 或者 $G_1\cap P_2=1$.若前者成立,则 $G_1\leqslant P_2$,当然,$G_1\leqslant N$,此时由 N 的唯一性知 $N=G_1\leqslant P_2$,从而 $P_1\cap N=P_2\cap N=N$,这样又得 $N\leqslant P_1$,与 $N\not\subset P_1$ 矛盾.故 $G_1\cap P_2=1$,我们有 $|P\cap G_1|\leqslant p^2$.由于 $P\cap G_1$ 是 G_1 的 Sylow p-子群,故由引理1.9知,G_1 为 p-幂零群.进而,由(1)知 $G_1=P\cap G_1=N$.再次应用引理1.9得 G 为 p-幂零群,矛盾.故 P_2 在 G 中 X-半置换,即存在 G 的子群 T 使得 $G=P_2T$,且对于 T 的任意子群 T_1,存在 $x\in X$ 使得 $P_2T_1^x=T_1^xP_2$.特别地,对于 $T_q\in \mathrm{Syl}_q(T)$ 有 $y\in X$ 使得 $P_2T_q^y=T_q^yP_2$.这样 $P_2\cap N=P_2T_q^y\cap N<P_2T_q^y$.但是 $P_2\cap N=P_1\cap N<P$,所以 $P_2\cap N<\langle P_2T_q^y,P\rangle=G$.由 N 的极小正规性得 $P_2\cap N=1$.由于 $P=P_1N$,故 $|N|=p$.由推论2.1即知 G 为 p-幂零群,矛盾.

情形2.$P_1\cap N=P_1$.此时 $P_1\leqslant N$,$P=P_1N=N$.设 P_2 是 P 的任意二次极大子群.若 P_2 在 G 中半覆盖-远离,则 P_2 覆盖或者远离 G 的一个主群列 $1=G_0<G_1<\cdots<G_l=G$ 的每个主因子.于是 $P_2G_1=P_2$ 或 $P_2\cap G_1=1$.若 $P_2G_1=P_2$,则 $G_1\leqslant P_2$.由 N 的唯一性得 $N=G_1\leqslant P_2$,这就产生矛盾.所以 $P_2\cap G_1=1$.即有 $|P\cap G_1|\leqslant p^2$.由引理1.9知,G_1 为 p-幂零群.再由(1)知 $G_1=P\cap G_1$.这样 $N=P\cap G_1$.再次由引理1.9得 G 为 p-幂零,矛盾.故 P_2 在 G 中 X-半置换.由题设,存在 G 的子群 T 使得 $G=P_2T$ 且对于 T 的任意子群 T_1,存在 $x\in X$ 使得 $P_2T_1^x=T_1^xP_2$.特别地,对于 $T_q\in \mathrm{Syl}_q(T)$ 有 $y\in X$ 使得 $P_2T_q^y=T_q^yP_2$.因此 $P_2=P_2T_q^y\cap N<P_2T_q^y$.由于 P 交换,故 $P_2<P$,从而 $P_2<\langle P_2T_q^y,P\rangle=G$.由 N 的极小正规性得 $P_2=1$.故 $|P|=|N|=p^2$.由引理1.9知 G 为 p-幂零群,矛盾.

(4)反例不存在.

设 P_2 是 P 的任意二次极大子群.由引理1.9知 $P_2\neq 1$.若 P_2 在 G 中半覆盖-远离,则 P_2 覆盖或远离 G 的某个主群列 $1=G_0<G_1<\cdots<G_l=G$ 的每个主因子.所以,$P_2G_1=P_2$ 或者 $P_2\cap G_1=1$.若 $P_2G_1=P_2$,则 $G_1\leqslant P_2$,从而 $G_1\leqslant O_p(G)$,这与(3)矛盾.故 $P_2\cap G_1=1$,而 $|P\cap G_1|\leqslant p^2$.引理1.9蕴含 G_1 为 p-幂零群,从而由(1)知 G_1 为 p-群,这仍与(3)矛盾.故 P_2 在 G 中 X-半置换.由(1)及(3)知,$X=1$.设 N 是 G 的任意极小正规子群.若 $NP<G$,则由(2)知,NP 为 p-幂零群;特别地,N 为 p-幂零,这与(1)或(3)矛盾.故 $NP=G$.由(1)及(3)知 G 不可解,故 N 为非交换同构单群的直积.由题设,存在 G 的子群 T 使得 $G=P_2T$ 且对于 T 的任意子群 T_1,有 $P_2T_1=T_1P_2$.于是,对于任意 $g=ba\in G$,其中 $a\in P_2$,$b\in T$ 以及 T 的任意 Sylow q-子群 T_q($q\neq p$),$T_q^bP_2^{a^{-1}}=T_q^bP_2$ 是群,即 $T_q^gP_2$ 是群.显然,$T_qP_2\neq G$,故由引理1.8知,G 中有包含 T_q 或 P_2 的真正规子群.于是,G 非单,从而 $P\cap N<P$.若 $P\cap N$ 不是 P 的极大子群,则可取 P_2 为 P 的包含 $P\cap N$ 的二次极大子群.利用上面的结果,对于任意 $n\in N$,$T_q^nP_2$ 是群.显然,$T_q\leqslant N$,故 $T_q^nP_2\cap N=T_q^n(P_2\cap N)=T_q^n(P\cap N)$.然而,$T_q(P\cap N)\neq N$,再由引理1.8知,$N$ 中有包含 T_q 或 $P\cap N$ 的真正规子群 N_1.但 N 为非交换同构单群的直积,N_1 也是 N 的若干直积因子的直积,这与 $T_q\leqslant N_1$ 或 $P\cap N\leqslant N_1$ 矛

盾. 故 $P\cap N$ 是 P 的极大子群. 由题设及引理 1.3 知, $P\cap N$ 的极大子群在 G 中, 从而在 N 中 X-半置换(这里 $X=1$). 由定理 1.1 知 N 为 p-幂零群, 这与 (1) 或 (3) 矛盾. 证明完毕.

利用定理 2.2, 类似推论 2.1 的证明, 可得下述推论.

推论 2.4 设 H 是群 G 的正规子群使得 G/H 为 p-幂零, 其中 p 是 $|G|$ 的一个素因子. 若 H 的 Sylow p-子群 P 的二次极大子群在 G 中半覆盖-远离或 $F_p(H)$-半置换且下述条件之一成立, 则 G 是 p-幂零群: (a) p 是 $|G|$ 的最小素因子且 G 与 A_4 无关; (b) $(|G|, p^2-1)=1$.

参考文献:

[1] 樊恽, 郭秀云, 岑嘉评. 关于子群的两种广义正规性的注记[J]. 数学年刊, 2006, 27A: 169-176.

[2] GUO Xiuyun, GUO Pengfei, SHUM K P. On semi cover-avoiding subgroups of finite groups[J]. J Pure Applied Algebra, 2007, 209: 151-158.

[3] LI Yangming, MIAO Long, WANG Yanming. On semi cover-avoiding maximal subgroups of Sylow subgroups of finite groups[J]. Comm Algebra, 2009, 37: 1160-1169.

[4] LI Shiheng, LIANG Dengfeng. Finite groups with some subgroups semi cover-avoiding[J]. J Suzhou University, 2006, 22(1): 1-4.

[5] GUO Wenbin, SHUM K P, SKIBA A N. X-semipermutable subgroups of finite groups[J]. J Algebra, 2007, 315: 31-41.

[6] GORENSTEIN D. Finite Groups [M]. New York: Chhelsea, 1980.

[7] 胡佩特 B. 有限群论: 第 1 卷[M]. 姜豪, 俞曙霞, 译. 福州: 福建人民出版社, 1992.

[8] 韦华全. 子群特性与有限群结构[D]. 广州: 中山大学博士学位论文, 2006.

(责任编辑: 尹 闯)