广西科学院学报
Journal of Guangxi Academy of Sciences

2011,27(4):306～310
Vol. 27,No. 4 November 2011

有限群的陪集及二重陪集的性质*
Properties of Cosets and Double Cosets on Finite Groups

林仕勋,任北上,王锦锦,夏嘉艺
LIN Shi-xun,REN Bei-shang,WANG Jin-jin,XIA Jia-yi

(广西师范学院数学科学学院,广西南宁 530001)
(School of Mathematical Sciences,Guangxi Teachers Education University,Nanning,Guangxi,530001,China)

摘要:以有限群子群的陪集为切入点,探讨二重陪集在群元素的计数、陪集和子群性质等方面的作用,从侧面考察了陪集和二重陪集之间的关系.

关键词:有限群 陪集 二重陪集 陪集代表系

中图法分类号:O152.1 **文献标识码**:A **文章编号**:1002-7378(2011)04-0306-05

Abstract:Based on the coset of finite groups, the action of double coset in counting group elements, properties of cosets and subgroups are studied. The relationship between cosets and double cosets are investigated from other side.

Key words:finite group,coset,double coset,system of coset representatives

陪集不仅仅是一个数学概念,而且是一种研究群的有力工具,它揭示了群与陪集之间的关系和陪集在数量上的关系,使得有限群的结构更为清晰,可以说它是有限群结构的基石.利用子群陪集的概念探讨有限群的性质为剖析有限群的结构提供了思路.二重陪集作为陪集定义的延展,从另一个角度获得了有限群的一种新结构.本文以有限群子群的陪集为切入点,探讨二重陪集在有关群元素的计数、陪集和子群性质等方面的作用,从侧面考察了陪集和二重陪集之间的关系.全文符号参考文献[1]的记法.

1 预备知识

定义 1 设 H 是群 G 的一个子群且 $g \in G$,则称集合 $gH=\{gh:h \in H\}$ 是群 G 关于 H 的一个左陪集,而称 $Hg=\{hg:h \in H\}$ 是群 G 关于 H 的一个右陪集.

引理 1[2] 设 H 是群 G 的一个子群且元素 a,$b \in G$.

(1) 若 $aH \cap bH \neq \varnothing$,则有 $aH=bH$. 反之显然成立.

(2) 对任意的 $a \in G$ 都有 $|aH|=|H|$.

(3) 若 $aH=bH$ 及任意的 $c \in G$,则有 $caH=cbH$ 且 $aHc=bHc$.对右陪集也成立.

证明 (1) 若 $aH \cap bH \neq \varnothing$,可取某个 $g \in aH \cap bH$,则存在 $h_1,h_2 \in H$,使得 $g=ah_1=bh_2$,即有 $a=bh_2h_1^{-1}$. 所以 $aH=(bh_2h_1^{-1})H=bH$.

(2) 构造映射 $f:H \to aH$,其中 $f(h)=ah(h \in H)$. 断言 $|aH|=|H|$,那么只需证明 f 是双射. 显然,f 是满射. 若 $ah_1=ah_2(h_1,h_2 \in H)$,则 $a^{-1}(ah_1)=a^{-1}(ah_2)$,即 $h_1=h_2$,故 f 是单射.

(3) 由 $aH=bH$ 可知,存在元素 $h \in H$ 使得 $ah=b$,则有 $cbH=c(ah)H=caH$ 且 $bHc=(ah)Hc=aHc$.

Lagrange 定理[2] 如果群 H 是群 G 的一个子群,那么子群 H 的阶必整除群 G 的阶.

收稿日期:2011-06-20
作者简介:林仕勋(1987-),男,硕士研究生,主要从事环论、模及 Hopf 代数的研究。
* 广西自然科学基金项目(桂科目 2011GXNSFA018144,2010GXNSFB013048),广西教育厅科研项目(200911MS145),2012 年度新世纪广西高等教育教学改革工程项目资助。

定义 2[2] 设 H,K 为群 G 的两个子群且 $x\in G$,则称群 G 的子集 $HxK=\{hxk:h\in H,k\in K\}$ 为群 G 关于子群 H,K 的一个二重陪集. 特别地,简称 HxH 为 G 关于 H 的一个二重陪集.

2 主要结果

2.1 二重陪集的性质及其与陪集的关系

引理 2 对群 G 的任意两个二重陪集 HxK 与 HyK,若 $HxK\cap HyK\neq\varnothing$,则必有 $HxK=HyK$.

证明 由于 $HxK\cap HyK\neq\varnothing$,故存在元素 $a\in HxK\cap HyK$. 令 $a=h_1xk_1=h_2yk_2(h_i\in H,k_i\in K,i=1,2)$,则 $x=h_1^{-1}h_2yk_2k_1^{-1}\in HyK$. 从而对任意的 $h\in H,k\in K$,有 $hxk=(hh_1^{-1}h_2)y(kk_2k_1^{-1})\in HyK$,因此,$HxK\subseteq HyK$.

同理可证 $HxK\supseteq HyK$. 故 $HxK=HyK$.

从引理 2 可以看出,类似于群关于子群的陪集分解,我们也有群关于子群的二重陪集分解,即 $G=\bigcup Hx_iK(j\neq k,Hx_jK\cap Hx_kK=\varnothing)$. 另外,显然可得

$$HxK=\bigcup_{h\in H}hxK=\bigcup_{k\in K}Hxk.$$

即二重陪集 HxK 是一切形如陪集 $hxK(h\in H)$ 的并,同时也是一切形如陪集 $Hxk(k\in K)$ 的并.

引理 3 设 H 与 K 分别为群 G 的子群,元素 $a\in G$,那么,HaK 必是群 G 关于 H 的 $|K|/|K\cap a^{-1}Ha|$ 个互不相交的右陪集的并,又是群 G 关于 K 的 $|H|/|H\cap aKa^{-1}|$ 个互不相交的左陪集的并.

证明 对任意的 $k_1,k_2\in K$,如果 $Hak_1=Hak_2$,则 $Hak_1k_2^{-1}a^{-1}=H$,即 $ak_1k_2^{-1}a\in H$. 故有 $H\cap aKa^{-1}\neq\varnothing\Leftrightarrow K\cap a^{-1}Ha\neq\varnothing$ 成立.

记 $B=K\cap a^{-1}Ha$,显然 $B\leqslant K$,则 $K=Bk_1\cup Bk_2\cup\cdots\cup Bk_t,i\neq j,Bk_i\cap Bk_j=\varnothing$,所以有 $HaK=\bigcup_{i=1}^{t}HaBk_i=\bigcup_{i=1}^{t}Hak_i$. 此时,$t=|K|/|B|=|K|/|K\cap a^{-1}Ha|$.

再证,当 $i\neq j$ 时,$Hak_i\neq Hak_j$,即 $Hak_i\cap Hak_j=\varnothing$. 如此就能说明,在二重陪集 HaK 中含有群 G 关于 H 的右陪集个数有 t 个且 HaK 也是它们的并. 对子群 B 的右陪集代表系 $\{k_1,k_2,\cdots,k_t\}$ 任取两个元素 k',k'',显然 $k',k''\in B$ 不可能发生,则有如下情形.

情形 Ⅰ 若 $k'\in B,k''\notin B$,则 $HaBk'=Ha$,$HaBk''=Hak''$. 断言 $Hak''\neq Ha$. 否则,有 $ak''a^{-1}\in H$,即 $k''\in a^{-1}Ha$. 而 $k''\notin B$,故 $k''\notin K\cap a^{-1}Ha$,由此产生矛盾.

情形 Ⅱ 若 $k',k''\notin B$,则 $HaBk'=Hak'$,$HaBk''=Hak''$. 断言 $Hak''\neq Hak'$. 否则 $Hak''=Hak'$,有 $ak'k''^{-1}a^{-1}\in H$,即 $k'k''^{-1}\in a^{-1}Ha$,则 $k'k''^{-1}\in B$. 但是 $Bk'\cap Bk''=\varnothing$,则有 $Bk'k''^{-1}\cap B=\varnothing$,即 $k'k''^{-1}\notin B$. 由此产生矛盾.

综上所述,引理前半部分证明完毕,同理可证后半部分.

定理 1 设 H 是群 G 的子群且 $g\in G$,则在 HgH 中,与群 G 关于 H 的右陪集 Hg(或左陪集 gH)相交且不空的群 G 关于 H 的左陪集(或右陪集)个数为 $|H|/|H\cap gHg^{-1}|$(或 $|H|/|H\cap g^{-1}Hg|$)个,且右陪集 Hg(或左陪集 gH)与其相交的每一个群 G 关于 H 的左陪集(或右陪集)所相交的元素个数相同,都为 $|H\cap gHg^{-1}|$(或 $|H\cap g^{-1}Hg|$)个.

证明 由引理 3 可知,在 HgH 中的群 G 关于 H 的左陪集个数为 $|H|/|H\cap gHg^{-1}|$ 个. 再证,在二重陪集 HgH 中的每个群 G 关于 H 的左陪集与 Hg 的交不为空集.

记 $t=|H|/|H\cap gHg^{-1}|$,则

$$HgH=\bigcup_{i=1}^{t}g_iH,g_kH\cap g_jH=\varnothing,k\neq j.$$

对 $\forall i(1\leqslant i\leqslant t)$,存在 $h_i,h_{i1},h_{i2}\in H$,使得 $g_ih_i=h_{i1}gh_{i2}$,即 $g_i(h_ih_{i2}^{-1})=h_{i1}g$. 故有 $g_iH\cap Hg\neq\varnothing$ 成立.

令 $A=H\cap gHg^{-1}$,显然有 $A\leqslant H$,则存在 $h_1,h_2,\cdots,h_t\in H$,使得

$$H=\bigcup_{i=1}^{t}h_iA,h_kA\cap h_jA=\varnothing,k\neq j.$$

而由 $h_iA\neq\varnothing$,则有 $h_iA=h_i(H\cap gHg^{-1})=H\cap h_igHg^{-1}\neq\varnothing$. 故有 $Hg\cap h_igH\neq\varnothing$ 且 $|h_iA|=|Hg\cap h_igH|$.

由于 $h_kA\cap h_jA=\varnothing(k\neq j)$,即 $h_kA\neq h_jA$. 故有 $H\cap h_kgHg^{-1}\neq H\cap h_jgHg^{-1}$,则

$$Hg\cap h_kgH\neq Hg\cap h_jgH.$$

记 $g_i=h_ig$. 由 $|h_iA|=|A|$ 与 $|h_iA|=|Hg\cap h_igH|$,可得

$$|Hg\cap h_igH|=|Hg\cap g_iH|=|A|=|H\cap gHg^{-1}|,1\leqslant i\leqslant t.$$

定理 2 设 H 和 K 是群 G 的子群且 $g\in G$,则在 HgK 中,与群 G 关于 H 的右陪集 Hg(或左陪集 gK)相交的群 G 关于 $K(H)$ 的左陪集(右陪集)个数为 $|H|/|H\cap gKg^{-1}|(|K|/|K\cap g^{-1}Hg|)$ 个,且右陪集 Hg(左陪集 gK)与其相交的每一个群 G 关于 $K(H)$ 的左陪集(右陪集)所相交的元素个数相同,都为 $|H\cap gKg^{-1}|(|K\cap g^{-1}Hg|)$ 个.

证明 由引理 3 可知,在 HgK 中的群 G 关于

K 的左陪集个数为 $|H|/|H\cap gKg^{-1}|$ 个. 再证，在 HgK 中的每个群 G 关于 K 左陪集与 Hg 的交不为空集.

记 $t=|H|/|H\cap gKg^{-1}|$，则 $HgK=\bigcup_{i=1}^{t}g_iK(g_iK\cap g_jK=\varnothing,l\neq j)$. 对 $\forall i(1\leqslant i\leqslant t)$，存在 $h_i\in H,k_{i1},k_{i2}\in K$，使得 $g_ik_{i1}=h_igk_{i2}$，即 $g_i(k_{i1}k_{i2}^{-1})=h_ig$. 故有 $g_iK\cap Hg\neq\varnothing$ 成立. 令 $A=H\cap gKg^{-1}$，显然有 $A\leqslant H$，则存在 $h_1,h_2,\cdots,h_t\in H$，使得

$$H=\bigcup_{i=1}^{t}h_iA,h_kA\cap h_jA=\varnothing,k\neq j.$$

而由 $h_iA\neq\varnothing$，有 $h_iA=h_i(H\cap gKg^{-1})=H\cap h_igKg^{-1}\neq\varnothing$. 故 $Hg\cap h_igK\neq\varnothing$ 且 $|h_iA|=|Hg\cap h_igK|$.

由于 $h_kA\cap h_jA=\varnothing(k\neq j)$，即 $h_kA\neq h_jA$. 故有 $H\cap h_kgKg^{-1}\neq H\cap h_jgKg^{-1}$，则 $Hg\cap h_kgK\neq Hg\cap h_jgK$. 记 $g_i=h_ig$. 由 $|h_iA|=|A|$ 与 $|h_iA|=|Hg\cap h_igK|$，可得

$$|Hg\cap h_igK|=|Hg\cap g_iK|=|A|=|H\cap gKg^{-1}|,1\leqslant i\leqslant t.$$

用具体的群来检验定理 1 与定理 2.

对于四次对称群：

$S_4=\{(1),(1\ 2),(1\ 3),(1\ 4),(2\ 3),(2\ 4),(3\ 4),(1\ 2\ 3),(1\ 3\ 2),(1\ 2\ 4),(1\ 4\ 2),(1\ 3\ 4),(1\ 4\ 3),(2\ 3\ 4),(2\ 4\ 3),(1\ 2\ 3\ 4),(1\ 2\ 4\ 3),(1\ 3\ 2\ 4),(1\ 3\ 4\ 2),(1\ 4\ 2\ 3),(1\ 4\ 3\ 2),(1\ 2)(3\ 4),(1\ 3)(2\ 4),(1\ 4)(2\ 3)\}$.

取它的子群 H 和 K 分别如下：

$H=\{(1),(1\ 2\ 3),(1\ 3\ 2)\}$，$K=\{(1),(1\ 2\ 3\ 4),(1\ 3)(2\ 4),(1\ 4\ 3\ 2)\}$.

则 S_4 关于 H 的右陪集为

$H(1\ 2)=\{(1\ 2),(1\ 3),(2\ 3)\}$，$H(1\ 4)=\{(1\ 4),(1\ 4\ 2\ 3),(1\ 4\ 3\ 2)\}$，

$H(2\ 4)=\{(2\ 4),(1\ 2\ 4\ 3),(1\ 3\ 2\ 4)\}$，$H(3\ 4)=\{(3\ 4),(1\ 3\ 4\ 2),(1\ 2\ 3\ 4)\}$，$H(1\ 2\ 4)=\{(1\ 2\ 4),(2\ 4\ 3),(1\ 3)(2\ 4)\}$，$H(1\ 4\ 2)=\{(1\ 4\ 2),(1\ 4\ 3),(1\ 4)(2\ 3)\}$，$H(2\ 3\ 4)=\{(2\ 3\ 4),(1\ 3\ 4),(1\ 2)(3\ 4)\}$，$H=\{(1),(1\ 2\ 3),(1\ 3\ 2)\}$.

S_4 关于 K 的左陪集为

$(1\ 2)K=\{(1\ 2),(2\ 3\ 4),(1\ 4\ 3),(1\ 3\ 2\ 4)\}$，$(1\ 3)K=\{(1\ 3),(2\ 4),(1\ 4)(2\ 3),(1\ 2)(3\ 4)\}$，$(1\ 4)K=\{(1\ 4),(1\ 2\ 3),(1\ 3\ 4\ 2),(2\ 4\ 3)\}$，$(2\ 3)K=\{(2\ 3),(1\ 3\ 4),(1\ 2\ 4\ 3),(1\ 4\ 2)\}$，$(3\ 4)K=\{(3\ 4),(1\ 2\ 4),(1\ 4\ 2\ 3),(1\ 3\ 2)\}$，$K=\{(1),(1\ 2\ 3\ 4),(1\ 3)(2\ 4),(1\ 4\ 3\ 2)\}$.

考察二重陪集 $H(1\ 2)K$，即

$H(1\ 2)K=\{(1\ 2),(2\ 3\ 4),(1\ 4\ 3),(1\ 3\ 2\ 4),(1\ 3),(2\ 4),(1\ 4)(2\ 3),(1\ 2)(3\ 4),(2\ 3),(1\ 3\ 4),(1\ 2\ 4\ 3),(1\ 4\ 2)\}$.

从以上的陪集分解可知

$H(1\ 2)K=H(1\ 2)\cup H(2\ 3\ 4)\cup H(2\ 4)\cup H(1\ 4\ 2)=(1\ 2)K\cup(1\ 3)K\cup(2\ 3)K$.

从图 1 可以看出，$H(1\ 2)$ 分别与 $(1\ 2)K$，$(1\ 3)K$，$(2\ 3)K$ 的交都不空，对于 $H(2\ 3\ 4)$，$H(2\ 4)$，$H(1\ 4\ 2)$ 也是如此. 再由上述的陪集表示，可以知道

$H(1\ 2)\cap(1\ 2)K=\{(1\ 2)\}$，$H(1\ 2)\cap(1\ 3)K=\{(1\ 3)\}$，$H(1\ 2)\cap(2\ 3)K=\{(2\ 3)\}$.

即在右陪集 $H(1\ 2)$ 中的所有元素都平均分配到与 $H(1\ 2)$ 相交的群 G 关于 K 的左陪集 $(1\ 2)K$，$(1\ 3)K$，$(2\ 3)K$ 里. 对于右陪集 $H(2\ 3\ 4)$，$H(2\ 4)$，$H(1\ 4\ 2)$ 也是同样的结果. 反过来，左陪集 $(1\ 2)K$ 中所有元素也都平均分配到与 $(1\ 2)K$ 相交的群 G 关于 H 的右陪集 $H(1\ 2)$，$H(2\ 3\ 4)$，$H(2\ 4)$，$H(1\ 4\ 2)$. 对于左陪集 $(1\ 3)K$，$(2\ 3)K$ 亦是如此.

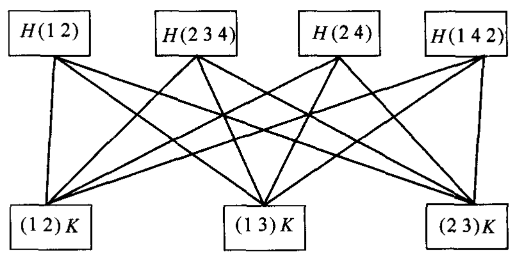

图 1　陪集关系图

由定理 2 能很快地计算出任何一个二重陪集所含有的元素个数，即 $|HgK|=(|H|/|H\cap gKg^{-1}|)|K|=(|K|/|K\cap g^{-1}Hg|)|H|$. 从而得出 $|K\cap g^{-1}Hg|=|H\cap gKg^{-1}|$. 即 $|K\cap g^{-1}Hg|$ 或者 $|H\cap gKg^{-1}|$ 都是 $|H|$ 与 $|K|$ 的公约数. 那就可以确定 $|HgK|$ 的取值范围，即为 $\max\{|H|,|K|\}\leqslant|HgK|\leqslant|G|$.

推论 1　有限群中任意两个阶为互质数的子群所构成的任何二重陪集的阶是这两个子群的阶的乘积.

证明　设 H,K 为群 G 的两个互质数阶子群，其阶分别为 $|H|=p$，$|K|=q$，$(p,q)=1$. 任取 $g\in G$ 构成二重陪集 HgK.

$$|HgK|=(|H|/|H\cap gKg^{-1}|)|K|=(|K|/|K\cap g^{-1}Hg|)|H|.$$

其中 $|K\cap g^{-1}Hg|=|H\cap gKg^{-1}|$，记为 d，且 d 为 $|H|$ 与 $|K|$ 的公约数，即 $d\mid p,d\mid q$. 又因为

$(p,q)=1$,则只能有 $d=1$,即 $|K\cap g^{-1}Hg|=|H\cap gKg^{-1}|=1$. 故可得 $|HgK|=|H||K|$.

推论 2 在阶为两个互质素数积的群中,任意两个阶互质的子群所构成的任何二重陪集都覆盖母群.

证明 设 H,K 为群 G 的两个子群,$\forall g\in G$,且母群 G 的阶为 $|G|=pq$(其中,p,q 为素数). 由 Lagrange 定理可知,子群 H,K 的阶必整除 G 的阶. 又因为 $(|H|,|K|)=1$,所以 $|H||K|=pq$. 而由推论 1,又有 $|HgK|=|H||K|$. 故得 $|HgK|=pq=|G|$,即二重陪集 HgK 覆盖母群 G.

推论 3 若 H,K 为群 G 的两个子群且 $(|H|,|K|)=1$,则对于 $\forall g\in G$,必有 $Hg\cap gK=\{g\}$.

证明 易知,$|K\cap g^{-1}Hg|=|H\cap gKg^{-1}|=|Hg\cap gK|$. 而 $|K\cap g^{-1}Hg|$ 是 $|H|,|K|$ 的公因数,又因 $(|H|,|K|)=1$,则有 $|K\cap g^{-1}Hg|=1$,即有 $|Hg\cap gK|=1$. 显然,$g\in Hg\cap gK$. 故只能有 $Hg\cap gK=\{g\}$.

推论 4 设 H,K 为群 G 的两个子群且元素 $a\in G$,则对于任意的 $b\in G$,集合 $HaKb$ 必定是 $|K|/|K\cap a^{-1}Ha|$ 个群 G 关于 H 的互不相交的右陪集的并,集合 $bHaK$ 必定是 $|H|/|H\cap aKa^{-1}|$ 个群 G 关于 K 的互不相交的左陪集的并.

证明 由引理 3 可知,二重陪集 HaK 是 $|K|/|K\cap a^{-1}Ha|$ 个群 G 关于 H 的互不相交的右陪集的并,不妨令 $HaK=\bigcup_{i=1}^{t}Hg_i$($Hg_j\cap Hg_k=\varnothing,j\neq k$). 所以,$HaKb=\bigcup_{i=1}^{t}Hg_ib$. 再由引理 1(3),可得 $Hg_jb\cap Hg_kb=\varnothing(1\leqslant j\neq k\leqslant t)$. 记 $g_i'=g_ib$,则 $HaKb=\bigcup_{i=1}^{t}Hg_i'$,即集合 $HaKb$ 是这些右陪集的并.

2.2 满足特定条件陪集间的数量关系

引理 4 设 $a,b,g\in G,H,K\leqslant G$. 若 $aK,bK\subseteq HgK$,则 $HaK=HbK=HgK$. 类似地,若有 $Ha,Hb\subseteq HgK$,则有 $HaK=HbK=HgK$. 同理,对 $Ha,bK\subseteq HgK$ 结论亦成立.

证明 由 $aK,bK\subseteq HgK$,则存在 $k_1,k_1',k_2,k_2'\in K$ 与 $h_1,h_2\in H$ 使得

$ak_1=h_1gk_1',bk_2=h_2gk_2'$,即 $a=h_1gk_1'k_1^{-1},b=h_2gk_2'k_2^{-1}$.

故 $HaK=H(h_1gk_1'k_1^{-1})K,HbK=H(h_2gk_2'k_2^{-1})K$. 又由 $H(h_1gk_1'k_1^{-1})K=H(h_2gk_2'k_2^{-1})K=HgK$,则 $HaK=HbK=HgK$.

类似可证其余部分.

引理 5 设 $H\leqslant G,K\leqslant G,a,b\in G$,那么

(1) 若 $Ha\cap HbK\neq\varnothing$,则 $Ha\subseteq HbK$,即 $HaK=HbK$.

(2) 若 $bK\cap HaK\neq\varnothing$,则 $bK\subseteq HaK$,即 $HaK=HbK$.

(3) 若 $Ha\cap bK\neq\varnothing$,则存在 $k\in K,h\in H$,使得 $ha=bk$,即 $HaK=HbK$.

证明 现只证明(1),其余两点类似可证. 由 $Ha\cap HbK\neq\varnothing$,显然可知 $h_1a=h_2bk_1$,其中,$h_1,h_2\in H,k_1\in K$. 于是,有 $a=h_1^{-1}h_2bk_1$,则 $Ha=H(h_1^{-1}h_2bk_1)=Hbk_1$. 又因为 $Hbk_1\subseteq HbK$,必有 $Ha\subseteq HbK$ 成立.

推论 5 定理 1 中的条件"在 HgH 中"与定理 2 中的条件"在 HgK 中"都替换为"在群 G 中"后,结论仍然成立.

推论 6 包含群 G 关于 H 的右陪集 Hg(或左陪集 gH)的二重陪集 HaH($a,g\in G,H\leqslant G$)必是全部与群 G 关于 H 的右陪集 Hg(或左陪集 gH)相交的群 G 关于 H 的左陪集(或右陪集)的并.

推论 7 在群 G 中,若群 G 有子群 H 且 $g\in G$,所有与群 G 关于 H 的右陪集 Hg(或左陪集 gH)相交非空的群 G 关于 H 的左陪集(或右陪集)必与构成 HgH 的群 G 关于 H 的每一个右陪集(或左陪集)的交集非空,且交集所含元素个数相等,都为 $|H\cap gHg^{-1}|$(或 $|H\cap g^{-1}Hg|$)个.

证明 仅证明推论 7 中左陪集的情况. 不妨设 $HgH=\bigcup_{i=1}^{t}g_iH=\bigcup_{i=1}^{t}Hg_i',g_jH\cap g_kH\neq\varnothing,Hg_j'\cap Hg_k'\neq\varnothing,j\neq k$.

从推论 5 可知,Hg 与每个包含在 HgH 中左陪集的交集中的元素个数相等. 任意取 $Hg_l'(1\leqslant l\leqslant t)$,则由引理 5 得 $HgH=Hg_l'H$,这意味着 $Hg_l'H=\bigcup_{i=1}^{t}g_iH$. 反复应用定理 1 的证明方法可得,$Hg_l'\cap g_iH\neq\varnothing,1\leqslant l,i\leqslant t$. 即在 HgH 中任何左陪集与任何右陪集的交集非空. 显然,它们交集所含元素个数相等.

定理 3 群 G 有子群 H 且 $g\in G$,则必有集合 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_t\}\subseteq G$,使得集合 X 既是群 G 关于 H 的左陪集代表系,也是群 G 关于 H 的右陪集代表系.

证明 把 G 分别用关于 H 的左、右陪集的并表示,不妨设为

$G=Hg_1\cup Hg_2\cup\cdots\cup Hg_t,Hg_k\cap Hg_j=\varnothing,k\neq j$,

$G=g_1'H\cup g_2'H\cup\cdots\cup g_t'H,g_k'H\cap g_j'H=\varnothing,k\neq j$.

由推论5，不妨设与 Hg_1 相交的左陪集个数为 t_1 个，则与 $g_1'H$ 相交的右陪集个数也为 t_1 个. 又由推论6和推论7，不妨令

$$Hg_1 \cup Hg_2 \cup \cdots \cup Hg_{t_1} = g_1'H \cup g_2'H \cup \cdots \cup g_{t_1}'H = Hg_1H.$$

此时，取 $x_i \in Hg_i \cap g_i'H(1 \leqslant i \leqslant t_1)$，则必有 $\bigcup_{i=1}^{t_1} Hx_i = \bigcup_{i=1}^{t_1} x_iH$.

同理可找出集合 X. 特别地，若 H 是群 G 的正规子群，则对于定理3还有 $Hx_i = x_iH$，$1 \leqslant i \leqslant t$.

参考文献：

[1] 张远达. 有限群构造(下册)[M]. 北京：科学出版社，1982.

[2] 杨子胥. 近世代数[M]. 第2版. 北京：高等教育出版社，2003.

(责任编辑：尹 闯)

(上接第305页)

异非线性方程组求解问题具有良好的适应性，特别是一些很难求解的超越方程，利用双种群进化策略求解更具意义.

参考文献：

[1] 王向军，向东，蒋涛，等. 一种双种群进化规划算法[J]. 计算机学报，2006，29(5)：835-840.

[2] 云庆夏. 进化算法[M]. 北京：冶金工业出版社，2000.

[3] 孙明杰，陈月霞，胡倩. 求解奇异非线性方程组的粒子群优化算法[J]. 黑龙江科技学院学报，2006，16(6)：369-373.

[4] 葛仁东，E·斯帕笛卡托，夏尊铨. 一种修正的求解一类奇异非线性方程组的ABS算法[J]. 大连理工大学学报，2003，43(6)：704-710.

[5] 吴国桢，王金华. 关于奇异非线性方程组的Newton法的收敛性[J]. 浙江大学学报：理学版，2008，35(1)：27-31.

(责任编辑：尹 闯)