广西科学院学报
Journal of Guangxi Academy of Sciences

2011,27(4):299～302
Vol. 27,No. 4 November 2011

两种摄动方法求解微分方程的近似解*

Regular and Singular Perturbation Solution for a Class of Nonlinear Differential Equations

韦玉程
WEI Yu-cheng

(河池学院数学系,广西宜州 546300)
(Department of Mathematics,Hechi University,Yizhou,Guangxi,546300,China)

摘要:通过对一个含小参数一阶非线性微分方程 Dirichlet 问题的近似求解,阐述正则摄动法和 PLK 奇异摄动法求解微分方程近似解的基本思想.

关键词:奇异摄动 正则摄动 渐近展开式 一致有效

中图法分类号:O175.1 **文献标识码**:A **文章编号**:1002-7378(2011)04-0299-04

Abstract:The ideal of regular perturbation and PLK-singular perturbation methods is presented by finding asymptotic solutions for a one order nonlinear differential equations Dirichlet problem which contains small parameters.

Key words:singular perturbation,regular perturbation,asymptotic expansions,uniformly valid

许多描述实际状态的工程、物理问题总可以用含有参数的函数 $u(x;\varepsilon)$ 来表示,而这些问题在数学上往往表示为微分方程 $L(u,x,\varepsilon)=0$ 和边值条件 $B(u,\varepsilon)=0$. 其中 x 为标量或向量的自变量,ε 为一个参数. 现实中我们一般只对参数很大或很小的情况感兴趣. 这个问题往往不能够精确地求解,但是,如果存在一个 ε_0(由于我们可适当调整 ε 的尺度,不妨设 $\varepsilon_0=0$),使得当 $\varepsilon=\varepsilon_0$ 时,对应的问题可以精确地或比较容易地解出,那么对于小的参量 ε 我们可以寻求如下的 ε 的幂形式的解. 即

$$u(x;\varepsilon)=u_0(x)+\varepsilon u_1(x)+\varepsilon^2 u_2(x)+\cdots,$$

其中 $u_n(x)$ 是与参数 ε 无关的函数. $u_0(x)$ 为 $L(u,x,0)=0;B(u,0)=0$ 的解. 这种方法称之为摄动法[1].

摄动法被广泛应用于非线性振动、非线性波、轨道力学、流体力学、固体力学、大气科学、等离子体物理等领域[2~6],是寻求代数方程,超越方程,微分方程,积分方程等方程近似分析解的一大类方法的总称,是方程近似求解中最主要的方法. 本文以一类一阶非线性微分方程为例,用两种摄动方法求其近似解.

1 基本概念

定义 1[3] 函数序列$\{\delta_n(\varepsilon)\}$称为渐近序列(有时也常用 $\delta_n(\varepsilon)$ 表示). 如果满足:$\delta_n(\varepsilon)=o(\delta_{n-1}(\varepsilon))$,当 $\varepsilon\to 0$ 时.

例如,$\{\varepsilon^n\}$,$\{(\log\varepsilon)^{-n}\}$,$\{(\sin\varepsilon)^n\}$ 等均为渐近序列.

定义 2[3] 函数项级数 $\sum\limits_{i=0}^{\infty}a_i\delta_i(\varepsilon)$ 称为一渐近展开式. 如果 a_i 与 ε 无关且 $\delta_i(\varepsilon)$ 为一渐近序列.

称渐近展开式 $\sum\limits_{i=0}^{\infty}a_i\delta_i(\varepsilon)$ 为 $\varepsilon\to 0$ 时 y 的渐近展开式,如果 $\varepsilon\to 0$ 时有

$$y=\sum_{i=0}^{n-1}a_i\delta_i(\varepsilon)+O(\delta_n(\varepsilon)).$$

记为 $y\sim\sum\limits_{i=0}^{\infty}a_i\delta_i(\varepsilon)$,$\varepsilon\to 0$.

收稿日期:2011-10-08
作者简介:韦玉程(1966-),男,副教授,主要从事非线性分析的研究。
*广西自然科学基金项目(0091265)资助。

定义 3[3] 设 $f(x;\varepsilon)=\sum_{i=0}^{\infty}a_i(x)\delta_i(\varepsilon)$，其中 $a_i(x)$ 是仅与 x 有关的函数，$\delta_i(\varepsilon)$ 为一渐近序列. 若满足

$$f(x;\varepsilon)=\sum_{i=0}^{n-1}a_i(x)\delta_i(\varepsilon)+R_n(x;\varepsilon).$$

若 $R_n(x;\varepsilon)=o(\delta_n(\varepsilon))$ 对所有的定义域内 x 的值都成立，则称此展开式为一致有效的；否则称为非一致有效的(或称为奇摄动展开).

注 1 由于 $\varepsilon\to 0$ 时，$\delta_n(\varepsilon)=o(\delta_{n-1}(\varepsilon))$，若展开式 $\sum_{i=0}^{\infty}a_1(x)\delta_i(\varepsilon)$ 是一致有效的，则对所有 x 的值 $a_i(x)$ 是非更奇于 $a_{i-1}(x)$. 即无论 x 取何值，级数的每一项必须是其前一项的小量修正.

注 2 一般的摄动问题中，渐近展开式的非一致有效性主要由以下几个方面引起：无限域，小参数与最高阶导数相乘，偏微分方程类型的改变和奇点的存在.

注 3 摄动方法的主要目的是对所求的摄动问题寻求一个渐近展开式，使得可以用这个展开式的前几项(一般是不多于两项)来近似地表示问题的解. 而且根据寻求的方法可分把摄动方法分为正则摄动和奇异摄动两类.

2 两种摄动方法求解

2.1 正则摄动法

正则摄动法的基本思想是设想有可能借助于选定的并且具有精确解的微分方程组，逐次近似地描述所研究的微分方程. 常见的是含有小参数的微分方程.

考虑 Dirichlet 问题：

$$\begin{cases}(x+\varepsilon y)\dfrac{dy}{dx}+(2+x)y=0,\\ y(1)=Ae^{-1},A>0.\end{cases}\tag{1}$$

此方程沿直线 $y=-\dfrac{x}{\varepsilon}$ 是奇异的，当 $\varepsilon=0$ 时，方程(1) 变为

$$\begin{cases}x\dfrac{dy}{dx}+(2+x)y=0,\\ y(1)=Ae^{-1},A>0.\end{cases}$$

用变量分离法可求得其解为 $y=Ax^{-2}e^{-x}$. 根据边界条件可知 $y(x)$ 在 $0\leqslant x<\infty$内是正则的.

下面用正则摄动法求它的一阶渐近解. 设

$$y=y_0(x)+\varepsilon y_1(x)+\cdots,\tag{2}$$

将(2) 式代入方程(1) 得

$$(x+\varepsilon y_0+\varepsilon^2 y_1+\cdots)(y_0'+\varepsilon y_1'+\cdots)+(2+x)(y_0+\varepsilon y_1+\cdots)=0.\tag{3}$$

根据方程(1) 的初值条件得

$$y_0(1)=Ae^{-1},y_1(1)=\cdots=0.$$

由于方程(3) 对任何的 ε 都成立，从而方程(3) 中关于 ε 的系数都等于零. 即

$$x\frac{dy_0}{dx}+(2+x)y_0=0,y_0(1)=Ae^{-1},\tag{4}$$

$$x\frac{dy_1}{dx}+y_0\frac{dy_0}{dx}+(2+x)y_1=0,y_1(1)=0.\tag{5}$$

对于方程(4)，利用常数变易法可得零阶问题的解是

$$y_0(x)=Ax^{-2}e^{-x}.$$

将 y_0 代入(5) 式并解所得方程，得

$$y_1(x)=x^{-2}e^{-1}A^2\int_1^x e^{-t}t^{-4}(t+2)dt.$$

利用 Taylor 展开式 $e^{-x}=1-\dfrac{x}{1}+\dfrac{x^2}{2!}-\dfrac{x^3}{3!}+\cdots$，当 $x\to 0$ 时，$y_0(x)=O(x^{-2})$，而 $y_1(x)=O(x^{-5})$. 这说明 $x=0$ 是零阶解的奇点，且奇性越来越大. 因此展开式(2) 在 $x=0$ 不是一致有效的. 这说明初值问题(1) 使用正则摄动方法得到的近似解不是一致有效的. 为了解决这个问题，我们需要对正则摄动进行改进.

2.2 PLK 奇异摄动法

PLK 奇异摄动方法的基本思想是在将解 $y(x)$ 关于小参数 ε 展开成 $y(x)=\sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon^m y_m(x)$ 的同时，引入一个新的变量将自变量 x 也作关于小参数 ε 的变形展开：

$$x(t)=t+\sum_{m=1}^{\infty}\varepsilon^m x_m(t).$$

其中 t 为新引进的自变量，$x_m(t)$ 为只与 t 有关的函数，常称为坐标变形函数(或坐标伸缩函数)，一般是非线性的. 引入 $x_m(t)$ 为解决高阶渐近的强奇性提供了自由度，为使上面的两个展式都一致有效，必须满足 $\dfrac{y_m}{y_{m-1}}$ 和 $\dfrac{x_m}{x_{m-1}}$ 都是有界的条件. 也就是说，高阶渐近的奇性不比低阶渐近的奇性强. 在实际应用中常使用 $y(x)=\sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon^m y_m(t)$ 与 $x(t)=t+\sum_{m=1}^{\infty}\varepsilon^m x_m(t)$ 的参数展开式.

下面用 PLK 方法求解 Dirichlet 问题(1).

(a) 当 $\varepsilon=0$ 时，未摄动问题的精确解为 $y(x)=Ae^{-x}x^{-2}$.

(b) 当 $\varepsilon\neq 0$ 时，令

$$y(x)=\sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon^m y_m(t), \tag{6}$$

$$x(t)=t+\sum_{m=1}^{\infty}\varepsilon^m x_m(t). \tag{7}$$

首先确定 $x=1$ 时 t 的值,记为 $\tilde{t}$,即

$$\tilde{t}=1-\sum_{m=1}^{\infty}\varepsilon^m x_m(\tilde{t}). \tag{8}$$

将 $\tilde{t}$ 以 ε 的幂级数展开:

$$\tilde{t}=1+\varepsilon\tilde{t}_1+\varepsilon^2 2^2+\cdots, \tag{9}$$

再将(9)式代入(8)式得

$$1+\varepsilon\tilde{t}_1+\varepsilon^2\tilde{t}_2^2+\cdots=1-\varepsilon x_1(1+\varepsilon\tilde{t}_1+\varepsilon^2\tilde{t}_2^2+\cdots)-\varepsilon^2 x_2(1+\varepsilon\tilde{t}_1+\varepsilon^2\tilde{t}_2^2+\cdots)-o(\varepsilon^2). \tag{10}$$

将 $x_1(1+\varepsilon\tilde{t}_1+\varepsilon^2\tilde{t}_2^2+\cdots)$ 及 $x_2(1+\varepsilon\tilde{t}_1+\varepsilon^2\tilde{t}_2^2+\cdots)$ 在 1 处作 Taylor 展开得

$$x_1(1+\varepsilon\tilde{t}_1+\varepsilon^2\tilde{t}_2^2+\cdots)=x_1(1)+\frac{x_1'(1)}{1!}(\varepsilon\tilde{t}_1+\varepsilon^2\tilde{t}_2+\cdots)+\frac{x''_1(1)}{2!}(\varepsilon\tilde{t}_1+\varepsilon^2\tilde{t}_2+\cdots)^2+o(\varepsilon^2), \tag{11}$$

$$x_2(1+\varepsilon\tilde{t}_1+\varepsilon^2\tilde{t}_2^2+\cdots)=x_2(1)+\frac{x_2'(1)}{1!}(\varepsilon\tilde{t}_1+\varepsilon^2\tilde{t}_2+\cdots)+o(\varepsilon). \tag{12}$$

把(11)式及(12)式代入(10)式得

$$1+\varepsilon\tilde{t}_1+\varepsilon^2\tilde{t}_2^2+\cdots=1-\varepsilon x_1(1)-\varepsilon^2(x_2(1)+x_1'(1)\tilde{t}_1)+o(\varepsilon^2).$$

比较 ε 的同次幂系数得

$$\tilde{t}_1=-x_1(1),\tilde{t}_2=-x_2(1)-x_1'(1)\tilde{t}_1,$$

于是有

$$\tilde{t}=1-\varepsilon x_1(1)-\varepsilon^2[x_2(1)-x_1'(1)x_1(1)]+\cdots.$$

由方程的初值知

$$Ae^{-1}=\sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon^m y_m(\tilde{t})=\sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon^m y_m(1-\varepsilon x_1(1)-\varepsilon^2(x_2(1)-x_1'(1)x_1(1))+\cdots), \tag{13}$$

将 $y_m(1-\varepsilon x_1(1)-\varepsilon^2(x_2(1)-x_1'(1)x_1(1))+\cdots)$ 在 1 处作 Taylor 展开得

$$y_m(1-\varepsilon x_1(1)-\varepsilon^2(x_2(1)-x_1'(1)x_1(1))+\cdots)=y_m(1)+y_m'(1)(-\varepsilon x_1(1)-\varepsilon^2(x_2(1)-x_1'(1)x_1(1))+\cdots)+\frac{y_m''(1)}{2!}(-\varepsilon x_1(1)-\varepsilon^2(x_2(1)-x_1'(1)x_1(1))+\cdots)^2+\cdots,$$

再将其代入(13)式并比较 ε 的 0,1 次幂得

$$y_0(1)=Ae^{-1},y_1(1)=y_0'(1)x_1(1).$$

由(6)式及(7)式有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\div\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{\sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon^m y_m'(t)}{1+\sum_{m-1}^{\infty}\varepsilon^m x_m'(t)}=y_0'+\varepsilon(y_1'-x_1'y_0')+\varepsilon^2[y_2'-y_0'x_2'-x_1'(y_1'-y_0'x_1')]+o(\varepsilon). \tag{14}$$

将(6)式,(7)式及(14)式代入方程(1),并令 ε^0,ε^1 及 ε^2 的系数为零得

$$ty_0'+(2+t)y_0=0, \tag{15}$$

$$t(y_1'-x_1'y_0')+y_0'(x_1+y_0)+x_1y_0+(2+t)y_1=0, \tag{16}$$

$$t[y_2'-x_2'y_0'-x_1'(y_1'-x_1'y_0')]+(x_1+y_0)(y_1'-x_1'y_0')+y_0'(x_2+y_1)+y_2(2+t)+x_1y_1+x_2y_0=0. \tag{17}$$

由(15)式得 $y_0(t)=Ae^{-t}t^{-2}$.由(16)式得

$$ty_1'+(2+t)y_1=tx_1'y_0'-y_0'(x_1+y_0)-x_1y_0,$$

上式两边乘 $\frac{1}{ty_0}$ 并作适当的变形得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{y_1}{y_0}\right)=\frac{1}{t}\left[-2x_1'+\frac{2}{t}x_1+\frac{2A}{t^3}+\frac{2A}{t^3}(e^{-t}-1)+\frac{Ae^{-t}}{t^2}-tx_1'\right]. \tag{18}$$

若 $x_1=0$,则(18)式可化为直接展开式中一阶项的方程.由正则摄动的过程知道,当 $x\to 0$ 时,$y_0=o(x^{-2})$,$y_1=o(x^{-5})$.故在 $x=0$ 处 y_1 比 y_0 更奇异.在(18)式中可看出式子右端的奇性最高次项出现在 $-2x_1'+\frac{2}{t}x_1+\frac{2A}{t^3}$ 中.如果能够选取 x_1 的值使得 $-2x_1'+\frac{2}{t}x_1+\frac{2A}{t^3}=0$,可以使 y_1 不比 y_0 更奇异,获得一致有效的展开式.为消去最坏的奇异性,获得一致有效的展开式,取

$$x_1'-\frac{x_1}{t}=\frac{A}{t^3}.$$

这是一个一阶非齐次线性方程,其解为

$$\frac{x_1}{t}+\frac{A}{3t^3}=C,$$

令 $C=0$ 得

$$x_1=-\frac{A}{3t^2}.$$

因此(16)式变为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{y_1}{y_0}\right)=-\frac{2A}{3t^3}-\frac{2A}{t^4}+Ae^{-t}\left(\frac{1}{t^3}+\frac{2}{t^4}\right). \tag{19}$$

(19)式两边从 t 到 1 积分得

$$y_1=A^2e^{-t}t^{-2}\left[\frac{2}{3t^3}+\frac{1}{3t^2}-\int_t^1 e^{-s}\left(\frac{2}{s^4}+\frac{1}{s^3}\right)\mathrm{d}s\right].$$

由(14)式可以得出

$$ty_2' + (2+t)y = tx_2'y_0' - (y_0 + y_0')x_2 - (y_0' + x_1)y_1 + (\frac{A}{t^2} - y_0)(y_1' - x_1'y_0'),$$

上式两边乘$\frac{1}{ty_0}$得

$$\frac{d}{dt}(\frac{y_2}{y_0}) = \frac{1}{t}[-(t+2)x_2' + \frac{2}{t}x_2 - \frac{(y_0' + x_1)y_1}{y_0} + \frac{(\frac{A}{t^2} - y_0)(y_0' - x_1'y_0')}{y_0}],$$

将 x_1,y_0 及 y_1 代入上式,使用 Taylor 展开式,通过繁琐的计算,最后得到 y_2 中包含最坏的奇异性项为

$$-2x_2' + \frac{2}{t}x_2 + \frac{4A^2}{3t^5}.$$

为消去 y_2 中最坏的奇异性,令 $-x_2' + \frac{1}{t}x_2 + \frac{2A^2}{3t^5} = 0$,解之得到伸缩函数

$$x_2 = -\frac{2A^2}{15t^4}.$$

从而得到方程(1)的近似展开式

$$y = Ae^{-t}t^{-2}\{1 + A\varepsilon[\frac{2}{3t^3} + \frac{1}{3t^2} - \int_t^1 e^{-s}(\frac{2}{s^4} + \frac{1}{s^3})ds]\} + O(\frac{\varepsilon^2}{t^6}),$$

其中 t 满足方程

$$x = t - \frac{\varepsilon A}{3t^2} - \frac{2\varepsilon^2 A^2}{15t^4} + o(\frac{\varepsilon^3}{t^6}).$$

参考文献:

[1] Nayfeh A H. 摄动方法[M]. 上海:上海科学技术出版社,1984.

[2] 包玉兰,董贵兴. 用摄动法求解非线性微分方程[J]. 内蒙古民族师院学报:自然科学版,1996(1):12-14.

[3] 潘祖梁. 非线性问题的数学方法及其应用[M]. 浙江:浙江大学出版社,1998.

[4] 刘日成. 奇异摄动问题中的若干方法[D]. 长春:吉林大学,2007.

[5] 钱伟长. 关于非线性科学[J]. 自然杂志,1995(1):7-9.

[6] 徐钧涛. 奇异摄动理论研究在华东师范大学的发展[J]. 华东师范大学学报:自然科学版,2006(1):31-34.

(责任编辑:尹　闯)

(上接第 298 页)

参考文献:

[1] 马知恩,周义仓,王稳地,等. 传染病动力学的数学建模与研究[M]. 北京:科学出版社,2004.

[2] Stone L, Shulgn B, Agur Z. Theoretical examination of thepulse vaccination policy in the SIR epidemic model [J]. Math Comput Model, 2000, 31(4-5):207-215.

[3] 赵文才,孟新柱. 一类具有 Logistic 死亡率的脉冲免疫接种 SIRS 传染病模型[J]. 吉林大学学报,2009,47(6):1165-1171.

[4] Li X, Wang W. A discrete epidemic model with stages-tructure[J]. Chaos Solitons and Tals, 2005, 26: 947-958.

[5] Wang W, Chen L. A predator-prey system with stage structure for predator[J]. Comput Math Apply, 1997, 33:83-9.

[6] 霍海峰,张良,苗黎明. 周期捕食-食饵模型的持续生存和正周期[J]. 兰州理工大学学报,2007,33(5):132-135.

[7] Charlesworth B. Evolution in age-structured populations[M]. 2nd ed. Cambridge: Cambridge University press, 1994.

[8] Cushing J M. An introduction to structured population dynamics[M]. SIAM, Philadelphia, 1998.

[9] 张小兵,霍海峰. 一类具有阶段结构和脉冲免疫的 SIR 传染病模型[J]. 兰州理工大学学报,2010,36(1):152-157.

(责任编辑:陈小玲)