一类线性时变脉冲系统的指数稳定性*

Exponential Stability of a Class of Linear Impulsive Time-Varying Systems

杜 蕊，陈武华，付 威
DU Rui, CHEN Wu-hua, FU Wei

（广西大学数学与信息科学学院，广西南宁 530004）
(College of Mathematics and Information Science, Guangxi University, Nanning, Guangxi, 530004, China)

摘要：用 Gronwall 不等式和冻结系数法，给出一类线性时变脉冲系统指数稳定的充分条件，并用数值例子说明结果是有效的.

关键词：脉冲系统 时变系统 指数稳定性

中图法分类号：O231 **文献标识码**：A **文章编号**：1002-7378(2011)04-0291-03

Abstract: The frozen coefficient method combined with the Gronwall inequality is applied to investigate the sufficient condition for exponential stability of a class of impulsive time-varying systems. An example is provided to illustrate the effectiveness of our results.

Key words: impulsive systems, time-varying systems, exponential stability

脉冲系统是一类不连续的动态系统，能充分反映瞬时突变现象对系统状态的影响，在很多领域有应用. 近 30 年来，人们对脉冲系统的定性理论及其应用研究十分活跃，取得了一大批重要成果[1]. 在脉冲系统稳定性方面，基于 Lyapunov 函数的稳定性理论已逐步建立起来[2]，并被推广到时滞脉冲系统和随机脉冲系统[3,4]. 但是基于 Lyapunov 函数的稳定性理论仍然是线性脉冲系统分析与综合的重要理论基础[5,6]. 然而，对于一个具体的脉冲系统，尤其是时变脉冲系统，构造 Lyapunov 函数无一般规律可循. 因此，通过构造性的方法，获得系统简洁的、较易验证的稳定性判据是有意义的.

在无脉冲的线性时变系统稳定性分析方面，已出现了很多重要的研究方法，如冻结系数法、迭代法，并已得到了一批实用的稳定性判据[7]. 然而，关于线性时变脉冲系统实用稳定性判据问题，鲜有文献报道. 本文运用冻结系数法思想研究了一类线性时变脉冲系统指数稳定性，获得了较易验证的稳定性判据. 把文献[2,8]中非时变脉冲系统的一些结论推广到了时变脉冲系统.

1 定义及引理

记 N 为正整数集. 考虑线性时变脉冲系统

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=A(t)x,\ t\neq t_k,\\ \Delta x(t)=B_k x(t_k^-),\ t=t_k,\\ x(t_0)=x_0,\end{cases} \tag{1}$$

其中 $A(t)$ 为 $n\times n$ 连续矩阵函数，B_k 为 $n\times n$ 的实矩阵，$k\in N$. 设 $x(t)\in R^n$ 是状态变量，$\Delta x(t_k)=x(t_k^+)-x(t_k^-)$ 表示系统状态在脉冲时刻 t_k 的跳变，

$x(t_k)=x(t_k^+)=\lim\limits_{h\to 0^+}x(t_k+h)$,

$x(t_k^-)=\lim\limits_{h\to 0^+}x(t_k-h)$, $t_0<t_1<t_2<\cdots<t_k<\cdots$, $\lim\limits_{k\to\infty}t_k=+\infty$.

定义 1 对给定的脉冲时间序列 $\{t_k\}$，脉冲系统(1) 称为指数稳定的，如果存在 $c,\mu>0$，使得系统(1) 的解 $x(t)$ 满足 $\|x(t)\|\leqslant c\|x_0\|e^{-\mu(t-t_0)}$，$t\geqslant t_0$.

当 $A(t)=A$ 为时不变矩阵时，系统(1) 变为

收稿日期：2011-04-15

作者简介：陈武华(1967-)，男，教授，主要从事控制系统理论与应用。

*国家自然科学基金项目(60864002)，广西自治区研究生创新项目(GXU11T32574)资助。

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=Ax,\ t\neq t_k,\\ \Delta x(t)=B_k x(t_k^-),\ t=t_k,\\ x(t_0)=x_0.\end{cases}\tag{2}$$

引理 1[2] (1) 考虑线性脉冲系统(2), $\forall t\geqslant s$, $t\in[t_k,t_{k+1})$, $s\in[t_{l-1},t_l)$,其状态转移矩阵 $\hat{\Phi}(t,s)$ 可以表示为

$$\hat{\Phi}(t,s)=e^{A(t-t_k)}\prod_{i=l+1}^{k}(I+B_i)e^{A(t_i-t_{i-1})}(I+B_l)e^{A(t_l-s)}.\tag{3}$$

(2) 系统(2) 对应的非齐次线性脉冲系统初值问题为

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=Ax(t)+f(t),\ t\neq t_k,\\ \Delta x(t)=B_k x(t_k^-),\ t=t_k,\\ x(t_0)=x_0.\end{cases}\tag{4}$$

对任意的 $t\geqslant s\geqslant t_0$,初值问题(4) 的解 $x(t)$ 可以表示为

$$x(t)=\hat{\Phi}(t,s)x(s)+\int_s^t\hat{\Phi}(t,\tau)f(\tau)\mathrm{d}\tau.\tag{5}$$

其中 $\hat{\Phi}(t,s)$ 为系统(2) 的状态转移矩阵.

引理 2[8] 设 $A\in R^{n\times n}$,若以下两个条件满足

(1) $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\mathrm{Re}\,\lambda_i(A)\leqslant\xi$,

(2) $\|A\|\leqslant M$,

则 $\forall\varepsilon\in(0,2M)$, $\|e^{tA}\|\leqslant(\frac{2M}{\varepsilon})^{n-1}e^{(\xi+\varepsilon)t}$.

2 主要结果

假设系统(1) 满足下列条件:

(B1) $\|A(t_2)-A(t_1)\|\leqslant L|t_2-t_1|$, $\forall t_1,t_2\geqslant t_0$, $L>0$,

(B2) $\|e^{tA(u)}\|\leqslant Ke^{\alpha t}$, $\forall t\geqslant t_0$, $u\geqslant t_0$, $K\geqslant 1$,

(B3) $t_k-t_{k-1}=\delta>0$, $k\in\mathrm{N}$, 且 $\|(I+B_i)e^{A(u)\delta}\|\leqslant\mu<1$.

选取某个 $u>t_0$,则系统(1) 可改写为

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=A(u)x(t)+[A(t)-A(u)]x(t),\\ \qquad t\neq t_k,\\ \Delta x=B_k x(t_k^-),t=t_k.\end{cases}\tag{6}$$

系统(6) 可以视为系统

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=A(u)x,t\neq t_k,\\ \Delta x=B_k x(t_k^-),t=t_k\end{cases}\tag{7}$$

的扰动. 记 $\overline{\Phi}(t,s)$ 为系统(6) 的状态转移矩阵,由引理 1, $t\in[t_k,t_{k+1})$, $s\in[t_{l-1},t_l)$, $\forall t\geqslant s$,得到

$$\overline{\Phi}(t,s)=e^{A(u)(t-t_k)}\prod_{i=l+1}^{k}(I+B_i)e^{A(u)(t_i-t_{i-1})}(I+B_l)e^{A(u)(t_l-s)}.\tag{8}$$

定理 1 对时变脉冲系统(1),假设条件(B1),(B2) 和(B3) 成立. 若记 $\Phi(t,s)$ 是系统(1) 的状态转移矩阵,那么有如下估计

$$\|\Phi(t,s)\|\leqslant C_1e^{\beta(t-s)},\ \forall t\geqslant s.\tag{9}$$

其中

$$C_1=K^2e^{(\alpha+\gamma)\delta},\gamma=-\frac{\ln\mu}{\delta},\beta=\sqrt{C_2\ln C_1}-\gamma,$$

$C_2=LC_1$.

特别地,当 $\beta<0$,则系统(1) 为指数稳定的.

证明 记 $f(t)=[A(t)-A(u)]x(t)$. 由引理 1,系统(6) 的解 $x(t)$ 可以表示为

$$x(t)=\overline{\Phi}(t,s)x(s)+\int_s^t\overline{\Phi}(t,\tau)f(\tau)\mathrm{d}\tau=e^{A(u)(t-t_k)}\prod_{i=l+1}^{k}(I+B_i)e^{A(u)\delta}(I+B_l)e^{A(u)(t_l-s)}x(s)+\int_s^{t_l}e^{A(u)(t-t_k)}\prod_{i=l+1}^{k}(I+B_i)e^{A(u)\delta}(I+B_l)e^{A(u)(t_l-\tau)}\cdot f(\tau)\mathrm{d}\tau+\sum_{j=l}^{k-1}\int_{t_j}^{t_{j+1}}e^{A(u)(t-t_k)}\prod_{i=j+2}^{k}(I+B_i)e^{A(u)\delta}(I+B_{j+1})e^{A(u)(t_{j+1}-\tau)}f(\tau)\mathrm{d}\tau+\int_{t_k}^{t}e^{A(u)(t-\tau)}f(\tau)\mathrm{d}\tau.$$

利用条件(B1),(B2) 和(B3),得到

$$\|e^{A(u)(t-t_k)}\prod_{i=l+1}^{k}(I+B_i)e^{A(u)\delta}(I+B_l)e^{A(u)(t_l-s)}x(s)\|\leqslant K^2e^{\alpha(t-t_k)}\mu^{k-l}\|(I+B_l)e^{A(u)\delta}\|\,e^{\alpha(t_{l-1}-s)}\|x(s)\|\leqslant K^2e^{(k-l+1)\ln\mu}e^{[(2\alpha+\gamma)\delta+\gamma(k-l+1)\delta]}e^{-\gamma(t-s)}\|x(s)\|.$$

令 $\gamma=-\frac{\ln\mu}{\delta}$,则上式可以简化为

$$\|e^{A(u)(t-t_k)}\prod_{i=l+1}^{k}(I+B_i)e^{A(u)\delta}(I+B_l)e^{A(u)(t_l-s)}\|\leqslant C_1e^{-\gamma(t-s)}\|x(s)\|.$$

同理,

$$\|\int_s^{t_l}e^{A(u)(t-t_k)}\prod_{i=l+1}^{k}(I+B_i)e^{A(u)\delta}(I+B_l)e^{A(u)(t_l-\tau)}f(\tau)\mathrm{d}\tau\|\leqslant C_2\int_s^{t_l}e^{-\gamma(t-\tau)}L|\tau-u|\,\|x(\tau)\|\mathrm{d}\tau.$$

$$\|\int_{t_k}^{t}e^{A(u)(t-\tau)}f(\tau)\mathrm{d}\tau\|\leqslant C_2\int_{t_k}^{t}e^{-\gamma(t-\tau)}|\tau-u|\,\|x(\tau)\|\mathrm{d}\tau.$$

由以上各式得

$$\|x(t)\|\leqslant C_1e^{-\gamma(t-s)}\|x(s)\|+C_2\int_s^te^{-\gamma(t-\tau)}|\tau-u|\,\|x(\tau)\|\mathrm{d}\tau.$$

定义 $y(t)=e^{\gamma t}\|x(t)\|$,则

$$y(t)\leqslant C_1y(s)+C_2\int_s^t|\tau-u|\,y(\tau)\mathrm{d}\tau.$$

利用 Gronwall 不等式得

$$y(t)\leqslant C_1y(s)e^{C_2\int_s^t|\tau-u|\mathrm{d}\tau}.$$

其中 $\forall t\geqslant s\geqslant t_0$, $\forall u\geqslant t_0$.

取 $u=\frac{t+s}{2}$，则

$$y(t)\leqslant C_1 y(s) e^{C_2\frac{(t-s)^2}{4}}.$$

$$\|x(t)\| = e^{-\gamma t} y(t) \leqslant C_1 e^{[(-\gamma+\frac{C_2(t-s)}{4})(t-s)]}\|x(s)\|.$$

当 $s\leqslant t\leqslant s+h$ 时，其中 h 待定. 令 $\sigma=\frac{C_2 h}{4}$，则

$$\frac{C_2(t-s)}{4}\leqslant\sigma.$$

此时，

$$\|x(t)\|\leqslant C_1 e^{(-\gamma+\sigma)(t-s)}\|x(s)\|.$$

当 $t\in[s+h,s+2h]$ 时，

$$\|x(t)\|\leqslant C_1^2 e^{(-\gamma+\sigma)(t-s)}\|x(s)\|.$$

由数学归纳法，当 $t\in[s+mh,s+(m+1)h]$ 时，

$$\|x(t)\|\leqslant C_1^{m+1} e^{(-\gamma+\sigma)(t-s)}\|x(s)\|.$$

为了判断系统(1)的指数稳定性，将 m 去掉. 由于 $m\leqslant\frac{t-s}{h}$，所以 $C_1^{m+1}\leqslant C_1 e^{\frac{t-s}{h}\ln C_1}$.

那么

$$\|x(t)\|\leqslant C_1 e^{(\frac{\ln C_1}{h}-\gamma+\sigma)(t-s)}\|x(s)\|,$$

$$\|\Phi(t,s)\| = \sup_{\|x(s)\|\leqslant 1}\|\Phi(t,s)x(s)\| = \sup_{\|x(s)\|\leqslant 1}\|x(t)\|\leqslant C_1 e^{(\frac{\ln C_1}{h}-\gamma+\sigma)(t-s)}.$$

最后需要确定 h，由于

$$\sigma+\frac{\ln C_1}{h}\geqslant\sqrt{C_2\ln C_1}.$$

等号成立当且仅当 $\sigma=\frac{\ln C_1}{h}$，即 $h=2\sqrt{\frac{\ln C_1}{C_2}}$.

则(11)式变为

$$\|\Phi(t,s)\|\leqslant C_1 e^{\beta(t-s)}.$$

当 $\beta<0$ 时，由定义1可知系统(1)为指数稳定的.

注　当 $B_k=0$ 时，取 $\mu=Ke^{\alpha\delta}$，定理1即为文献[2]中相应的结论.

3　数值例子

为了方便，只研究二阶系统.

例1　考虑稳定系统

$$A(t)=\begin{pmatrix}-1-0.1\sin t & 1\\ 1 & -0.1\sin t\end{pmatrix},$$

其中 $B_1=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{1}{4}\\ \frac{1}{4} & -1\end{bmatrix}$，$B_2=\begin{bmatrix}-1 & \frac{1}{4}\\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}$.

由于 $\|A(t_2)-A(t_1)\|\leqslant 0.1|t_2-t_1|$，即 $L=0.1$. 故系统满足条件(B1).

取 $t_0=1,\delta=0.1$. 计算得

$$\max_{1\leqslant i\leqslant 2}\mathrm{Re}\,\lambda_i(A(t))=-0.1\sin t-0.5+\frac{\sqrt{5}}{2}\leqslant -1.618,\ \|A(t)\|\leqslant 2.9517.$$

故取 $\xi=-1.618,M=2.9517,\varepsilon=2,K=2.9517,\alpha=0.382$. 根据引理2，$\|e^{tA(u)}\|\leqslant 2.9517e^{0.382t}$. 即系统满足条件(B2). 由于 $\|(I+B_i)e^{A(t)\delta}\|\leqslant 0.6327$，取 $\mu=0.6327$，所以条件(B3)也满足.

最终计算得

$$\gamma=4.5776,C_1=14.3069,C_2=1.4307,\beta=-2.6265<0.$$

所以该系统是指数稳定的.

参考文献：

[1] Bainov D D, Simeonov P S. Systems with impulse effect: stability, theory and applications[M]. Chichester: Ellis Horwood, 1989.

[2] Yang T. Impulsive systems and control: theory and applications[M]. New York: Nova Science, 2001.

[3] Liu X, Ballinger G. Uniform asymptotic stability of impulsive delay differential equations[J]. Computers and Mathematics with Applications, 2001, 41(7-8): 903-915.

[4] 陈武华，王俊歌，唐友建，等. Markov 跳变的非线性脉冲系统指数稳定性[J]. 广西大学学报：自然科学版，2008, 33(1): 67-71.

[5] Chen W H, Wang J G, Tang Y J, et al. Robust H∞-control of uncertain linear impulsive stochastic systems[J]. Int J Robust Nonlinear Control, 2008, 18(13): 1348-1371.

[6] Chen W H, Zheng W X. Robust stability and H∞-control of uncertain impulsive systems with time-delay[J]. Automatica, 2009, 45(1): 109-117.

[7] 廖晓昕. 稳定性的数学理论及应用[M]. 武汉：华中师范大学出版社，2001.

[8] Coppel W A. Dichotomies in stability theory[M]. Berlin: Springer-Verlag, 1978.

（责任编辑：尹　闯）