广西科学院学报 2011,27(3):175～177
Journal of Guangxi Academy of Sciences Vol. 27, No. 3 August 2011

变形浅水波方程组新的精确解*

New Exact Solutions for the Variant Shallow Water Wave Equations

王艳青，冯大河
WANG Yan-qing, FENG Da-he

（桂林电子科技大学数学与计算科学学院，广西桂林 541004）
(School of Mathematics and Computational Science, Guilin University of Electronic Technology, Guilin, Guangxi, 541004, China)

摘要：应用 Fan 子方程法和符号计算软件 Maple 得到变形浅水波方程组新的精确解：三角函数精确解、双曲函数精确解、有理函数精确解、双周期 Jacobi 椭圆函数精确解和双周期 Weierstrass 椭圆函数精确解.

关键词：变形浅水波方程组 精确解 三角函数解 Jacobi 椭圆函数解 Fan 子方程法
中图法分类号：O175.1 **文献标识码**：A **文章编号**：1002-7378(2011)03-0175-03

Abstract: The Fan sub-equation method and symbolic computational software-Maple are used to study the variant shallow water wave equations. Some new exact solutions for the variant shallow water wave equations are obtained such as triangular function solutions, hyperbolic functions, rational function solutions, Jacobi elliptic function solutions with double periodic and Weieratrass elliptic function solutions with double periodic.

Key words: variant shallow water wave equations, exact solution, triangular function solutions, Jacobi elliptic function solutions with double period, Fan sub-equation method

求解非线性方程的精确解是非线性科学的研究热点之一，为了寻找非线性方程尽可能多的精确解，人们发展了许多方法，比如：反散射方法，Hirota 双线性法，Backlund 变换法，动力系统分支理论方法，Tanh 函数法，F 展开法等.

2003 年，范恩贵[1,2]提出一种求解非线性系统的子方程法——Fan 子方程法，近来，文献[3]改进了这种子方程法，获得了更为丰富的精确解. 这说明 Fan 子方程法是求解非线性偏微分方程的一种非常有效的方法.

本文考虑变形浅水波方程组[4]：

$$\begin{cases} u_t + h_x + uu_x - \varepsilon^2 u_{xxt} = 0, \\ h_t + u_x + (hu)_x + \delta^2 u_{xxx} = 0. \end{cases} \tag{1}$$

的精确解. 文献[5]已经用直接积分的方法得到方程组(1)的 3 组精确解，本文用不同的方法，即 Fan 子方程法，获得该方程更多的新精确解.

为求方程组(1)的解，令

$$u(x,t) = U(\xi), h(x,t) = H(\xi), \xi = kx + dt + n, \tag{2}$$

其中 d 为波速，k, d, n 为常数，将(2)式代入方程(1)，并关于 ξ 积分一次得

$$\begin{cases} dU + kH + \frac{k}{2}U^2 - \varepsilon^2 k^2 dU'' + g_1 = 0, \\ dH + kU + kHU + k^3\delta^2 U'' + g_2 = 0, \end{cases} \tag{3}$$

其中 g_1, g_2 为积分常数. 假设方程组(3)有解

$$U(\xi) = \sum_{i=0}^{r_1} a_i \varphi^i(\xi), H(\xi) = \sum_{s=0}^{r_2} b_s \varphi^s(\xi). \tag{4}$$

其中新变量 $\varphi = \varphi(\xi)$ 满足子方程

$$\varphi'(\xi) = \lambda \sqrt{\sum_{j=0}^{4} c_j \varphi^j}, \tag{5}$$

收稿日期：2010-10-29

作者简介：王艳青(1984-)，女，硕士研究生，主要从事动力系统的分支与混沌研究。

* 国家自然科学基金项目(11061010)，中南大学博士后科学基金项目资助。

其中 $\lambda=\pm 1, a_i, b_s, c_j$ 是待定常数.把变换(4)和子方程(5)代入方程(3)并平衡方程(3)中最高阶导数项和最高阶非线性项,得到 $r_1=2, r_2=2$.因此方程(3)有解

$$U=a_0+a_1\varphi+a_2\varphi^2, H=b_0+b_1\varphi+b_2\varphi^2. \tag{6}$$

新变量 $\varphi=\varphi(\xi)$ 满足子方程(5),再把变换(6)和子方程(5)代入方程(3),令所有形如 $\varphi^p(\varphi')^q(p=0,1,2\cdots;q=0,1)$ 的项的系数为0,得到一组关于 k, $d,\varepsilon,\delta,a_i,b_s$ 和 c_j 的代数方程:

$$\frac{1}{2}ka_2^2-6\varepsilon^2k^2da_2c_4=0,$$

$$-5\varepsilon^2k^2da_2c_3-2\varepsilon^2k^2da_1c_4+ka_1a_2=0,$$

$$da_2-4\varepsilon^2k^2da_2c_2-\frac{3}{2}\varepsilon^2k^2da_1c_3+kb_2+\frac{1}{2}ka_1^2+ka_0a_2=0,$$

$$da_1-\varepsilon^2k^2da_1c_2+ka_0a_1-3\varepsilon^2k^2da_2c_1+kb_1=0,$$

$$da_0+\frac{1}{2}ka_0^2+kb_0-\frac{1}{2}\varepsilon^2k^2da_1c_1+g_1-2\varepsilon^2k^2da_2c_0=0,$$

$$kb_2a_2+6k^3\delta^2a_2c_4=0,$$

$$2k^3\delta^2a_1c_4+kb_2a_1+kb_1a_2+5k^3\delta^2a_2c_3=0,$$

$$4k^3\delta^2a_2c_2+db_2+ka_2+kb_0a_2+kb_2a_0+\frac{3}{2}k^3\delta^2a_1c_3+kb_1a_1=0,$$

$$3k^3\delta^2a_2c_1+kb_0a_1+k^3\delta^2a_1c_2+ka_1+db_1+kb_1a_0=0,$$

$$g_2+ka_0+\frac{1}{2}k^3\delta^2a_1c_1+2k^3\delta^2a_2c_0+db_0+kb_0a_0=0.$$

应用符号计算软件 Maple 解得此方程组有以下5种情况的解:

情况1 $c_0=c_1=c_3=a_1=b_1=0$,或 $c_0=\frac{c_2^2}{4c_4}$, $c_1=c_3=a_1=b_1=0$,

$$a_0=\frac{-2d^2\varepsilon^2+8\varepsilon^4k^2d^2c_2+k^2\delta^2}{2k\varepsilon^2d}, a_2=12\varepsilon^2kdc_4, b_0=\frac{-8k^2\delta^2\varepsilon^4d^2c_2-4\varepsilon^4d^2+\delta^4k^2}{4\varepsilon^4d^2}, b_2=-6k^2\delta^2c_4, \tag{7}$$

其中 $k\neq 0,\varepsilon\neq 0,d\neq 0,c_2,c_4$ 为任意常数.

情况2 $c_0=c_1=c_4=a_2=b_2=0$, $a_0=\frac{-2d^2\varepsilon^2+2\varepsilon^4k^2d^2c_2+k^2\delta^2}{2k\varepsilon^2d}$, $a_1=3\varepsilon^2kdc_3$,

$$b_0=\frac{-2k^2\delta^2\varepsilon^4d^2c_2-4\varepsilon^4d^2+\delta^4k^2}{4\varepsilon^4d^2}, b_1=-\frac{3}{2}k^2\delta^2c_3, \tag{8}$$

其中 $k\neq 0,\varepsilon\neq 0,d\neq 0,c_2,c_3$ 为任意常数.

情况3 $c_0=c_1=0, c_2=\frac{c_3^2}{4c_4}$,

$$a_0=\frac{-2d^2\varepsilon^2+2\varepsilon^4k^2d^2c_2+k^2\delta^2}{2k\varepsilon^2d}, a_1=6\varepsilon^2kdc_3, a_2=12\varepsilon^2kdc_4,$$

$$b_0=\frac{-2k^2\delta^2\varepsilon^4d^2c_2-4\varepsilon^4d^2+\delta^4k^2}{4\varepsilon^4d^2}, b_1=-3k^2\delta^2c_3, b_2=-6k^2\delta^2c_4, \tag{9}$$

其中 $k\neq 0,\varepsilon\neq 0,d\neq 0,c_2,c_3,c_4$ 为任意常数.

情况4 $c_0=c_1=c_2=c_3=a_1=b_1=0$, $a_0=\frac{-2d^2\varepsilon^2+k^2\delta^2}{2k\varepsilon^2d}$, $a_2=12\varepsilon^2kdc_4$,

$$b_0=\frac{-4\varepsilon^4d^2+\delta^4k^2}{4\varepsilon^4d^2}, b_2=-6k^2\delta^2c_4, \tag{10}$$

其中 $k\neq 0,\varepsilon\neq 0,d\neq 0,c_4$ 为任意常数.

情况5 $c_2=c_4=a_2=b_2=0$, $a_0=\frac{-2d^2\varepsilon^2+k^2\delta^2}{2k\varepsilon^2d}$, $a_1=3\varepsilon^2kdc_3$,

$$b_0=\frac{-4\varepsilon^4d^2+\delta^4k^2}{4\varepsilon^4d^2}, b_1=-\frac{3}{2}k^2\delta^2c_3, \tag{11}$$

其中 $k\neq 0,\varepsilon\neq 0,d\neq 0,c_3$ 为任意常数.

把以上情况1~5分别代入方程(5),能够获得变形浅水波方程组的13组精确解.

由情况1,得子方程(5)的两组三角函数解,两组双曲函数解和三组双周期 Jacobi 椭圆函数解:

$$\varphi_1=\sqrt{-\frac{c_2}{c_4}}\sec(\sqrt{-c_2}\xi), c_2<0, c_4>0, \tag{12}$$

$$\varphi_2=\sqrt{-\frac{c_2}{c_4}}\operatorname{sech}(\sqrt{c_2}\xi), c_2>0, c_4<0, \tag{13}$$

$$\varphi_3=\pm\sqrt{\frac{c_2}{2c_4}}\tan(\sqrt{\frac{c_2}{2}}\xi), c_2>0, c_4>0, \tag{14}$$

$$\varphi_4=\pm\sqrt{-\frac{c_2}{2c_4}}\tanh(\sqrt{-\frac{c_2}{2}}\xi), c_2<0, c_4>0, \tag{15}$$

$$\varphi_5=\sqrt{-\frac{c_2m^2}{c_4(2m^2-1)}}\operatorname{cn}(\sqrt{\frac{c_2}{2m^2-1}}\xi, m), c_2>0, c_4<0, \tag{16}$$

$$\varphi_6=\sqrt{\frac{-c_2}{c_4(2-m^2)}}\operatorname{dn}(\sqrt{\frac{c_2}{2-m^2}}\xi, m), c_2>0, c_4<0, \tag{17}$$

$$\varphi_7=\pm\sqrt{-\frac{c_2m^2}{c_4(m^2+1)}}\,\mathrm{sn}\left(\sqrt{-\frac{c_2}{m^2+1}}\xi,m\right),$$

$c_2<0, c_4>0$, (18)

其中 m 为 Jacobi 椭圆函数的模.通过变换(6),求得变形浅水波方程组的精确解

$$\begin{cases} u_i=\dfrac{-2d^2\varepsilon^2+8\varepsilon^4k^2d^2c_2+k^2\delta^2}{2k\varepsilon^2d}+ \\ \quad 12\varepsilon^2kdc_4\varphi_i^2, \\ h_i=\dfrac{-8k^2\delta^2\varepsilon^4d^2c_2-4\varepsilon^4d^2+\delta^4k^2}{4\varepsilon^4d^2}- \\ \quad 6k^2\delta^2c_4\varphi_i^2, \end{cases}$$

$1\leqslant i\leqslant 7$. (19)

由情况2,得子方程(5)的一组三角函数解和一组双曲函数解

$$\varphi_8=-\frac{c_2}{c_3}\sec^2\left(\frac{\sqrt{-c_2}}{2}\xi\right),c_2<0, \tag{20}$$

$$\varphi_9=-\frac{c_2}{c_3}\mathrm{sech}^2\left(\frac{\sqrt{c_2}}{2}\xi\right),c_2>0. \tag{21}$$

再通过变换(6),求得变形浅水波方程组的精确解

$$\begin{cases} u_i=\dfrac{-2d^2\varepsilon^2+2\varepsilon^4k^2d^2c_2+k^2\delta^2}{2k\varepsilon^2d}+ \\ \quad 3\varepsilon^2kdc_3\varphi_i, \\ h_i=\dfrac{-2k^2\delta^2\varepsilon^4d^2c_2-4\varepsilon^4d^2+\delta^4k^2}{4\varepsilon^4d^2}- \\ \quad \dfrac{3}{2}k^2\delta^2c_3\varphi_i, \end{cases}$$

$i=8,9$. (22)

由情况3,得子方程(5)的一组三角函数解和一组双曲函数解

$$\varphi_{10}=-\frac{c_2\sec^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{-c_2}\,\xi\right)}{2\lambda\sqrt{-c_2c_4}\tan\left(\frac{1}{2}\sqrt{-c_2}\,\xi\right)+c_3},$$

$c_2<0$. (23)

$$\varphi_{11}=\frac{c_2\,\mathrm{sech}^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{c_2}\,\xi\right)}{2\lambda\sqrt{c_2c_4}\tanh\left(\frac{1}{2}\sqrt{c_2}\,\xi\right)-c_3},c_2>0. \tag{24}$$

通过变换(6),求得变形浅水波方程组的精确解

$$\begin{cases} u_i=\dfrac{-2d^2\varepsilon^2+2\varepsilon^4k^2d^2c_2+k^2\delta^2}{2k\varepsilon^2d}+ \\ \quad 6\varepsilon^2kdc_3\varphi_i+12\varepsilon^2kdc_4\varphi_i^2, \\ h_i=\dfrac{-2k^2\delta^2\varepsilon^4d^2c_2-4\varepsilon^4d^2+\delta^4k^2}{4\varepsilon^4d^2}- \\ \quad 3k^2\delta^2c_3\varphi_i-6k^2\delta^2c_4\varphi_i^2, \end{cases}$$

$i=10,11$. (25)

由情况4,得子方程(5)的一组有理函数解

$$\varphi_{12}=-\frac{\lambda}{\sqrt{c_4}\,\xi},c_4>0. \tag{26}$$

通过变换(6),求得变形浅水波方程组的精确解

$$\begin{cases} u_{12}=\dfrac{-2d^2\varepsilon^2+k^2\delta^2}{2k\varepsilon^2d}+12\varepsilon^2kdc_4\varphi_{12}^2, \\ h_{12}=\dfrac{-4\varepsilon^4d^2+\delta^4k^2}{4\varepsilon^4d^2}-6k^2\delta^2c_4\varphi_{12}^2. \end{cases} \tag{27}$$

由情况5,得子方程(5)的一组双周期 Weierstrass 椭圆函数解

$$\varphi_{13}=\wp\left(\frac{\sqrt{c_3}}{2}\xi,g_2,g_3\right),c_3>0, \tag{28}$$

其中 $g_2=-\dfrac{4c_1}{c_3}, g_3=-\dfrac{4c_0}{c_3}$ 是 Weierstrass 椭圆函数的不变量.通过变换(6),求得变形浅水波方程组的精确解

$$\begin{cases} u_{13}=\dfrac{-2d^2\varepsilon^2+k^2\delta^2}{2k\varepsilon^2d}+3\varepsilon^2kdc_3\varphi_{13}, \\ h_{13}=\dfrac{-4\varepsilon^4d^2+\delta^4k^2}{4\varepsilon^4d^2}-\dfrac{3}{2}k^2\delta^2c_3\varphi_{13}. \end{cases} \tag{29}$$

上述精确解除了文献[5]中相同的结果外,还一些新的精确解,比如:双周期 Jacobi 椭圆函数解、双周期 Weierstrass 椭圆函数解和有理函数解.

参考文献:

[1] Fan E G. Uniformly constructing a series of explicit exact solutions to nonlinear equations in mathematical physics[J]. Chaos, Solitons & Fractals, 2003, 16: 819-839.

[2] Fan E G. Travelling wave solutions in terms of special functions for nonlinear coupled evolution systems[J]. Physics Letters A, 2002, 300: 243-249.

[3] Feng Dahe, Li Jibin. Exact explicit travelling wave solutions for the $(n+1)$-dimensional φ^6 field model[J]. Physics Letters A, 2007, 369(4): 255-261.

[4] 王明亮,张辉群.变形浅水波方程组的一个非线性变换及其应用[J].数学进展,1999,28:72-75.

[5] 刘春平.双参数假设与变形浅水波方程组的精确解[J].应用数学,2000,13:15-18.

(责任编辑:尹 闯)