

# 一类具有种群 Logistic 增长及非线性发生率的时滞 SIS 传染病模型的稳定性与 Hopf 分支

## Stability and Hopf Bifurcation of a Delayed SIS Model with Species Logistic Growth and a Nonlinear Incidence Rate

赵仕杰, 李大普

ZHAO Shi-jie, LI Da-pu

(桂林电子科技大学数学与计算科学学院, 广西桂林 541004)

(School of Mathematics and Computing Science, Guilin University of Electronic Technology, Guilin, Guangxi, 541004, China)

**摘要:**分析一类具有种群 Logistic 增长及非线性发生率的时滞 SIS 传染病模型的正平衡点局部稳定性, 应用规范型理论和中心流形定理给出该模型关于 Hopf 分支周期解的稳定性及分支方向的计算公式. 最后使用 Matlab 软件对所得结果进行数值模拟验证.

**关键词:** SIS 传染病模型 非线性发生率 稳定性 Hopf 分支

**中图分类号:** O175.14 **文献标识码:** A **文章编号:** 1002-7378(2011)01-0006-04

**Abstract:** A delayed SIS Model with Species Logistic growth and a non-linear incidence rate is studied. First, the local stability of the positive equilibrium is investigated. Then, based on center manifold and normal form, the formulas for the determining the direction of Hopf bifurcation and the stability of bifurcating periodic solutions are obtained. Finally, some numerical simulations are carried out by matlab program.

**Key words:** SIS epidemic model, incidence rate, stability, Hopf bifurcation

自 1932 年 Kermack 和 McKendrick<sup>[1]</sup> 提出 SIS 传染病模型以来, 许多学者在文献[1]的基础上作了进一步研究, 建立了大量传染病模型, 如文献[2]研究具有免疫和人口总数变化的 SIS 模型, 文献[3, 4]讨论一类具有变时滞 SIS 传染病模型. 在传统的 SIS 模型中, 大多假设人口的总量是常数, 这样的假设仅当疾病的传播速度快, 流行时间短, 环境封闭且忽略出生率和死亡率的情况下才是合理的. 但是在实际问题中, 人口的总量是在不断变化的. 文献[5]假设人口总数量按 Logistic 增长, 因此易感者人数  $S(t)$  也是按 Logistic 增长, 即:

$$\frac{dS}{dt} = rS \left(1 - \frac{S}{K}\right),$$

其中  $S(t)$  表示易感者在时刻  $t$  的人数,  $r$  表示自然增长率,  $K$  为环境容纳量.

在经典的传染病模型中, 大多数模型都采用双线性发生率 ( $\beta SI$ ) 和标准发生率 ( $\beta SI/N$ )<sup>[6~8]</sup>. 双线性发生率针对接触率与环境内人口总数成正比. 标准发生率是假设接触率为易常数, 这样的假设也是符合实际的, 因为易感者人数越多, 病人与易感者接触的机会越大, 因此传染力就越大. 但是在某种情况下, 这样的假设也不合理, 比如, 在实际问题中, 易感者人数再多, 一个病人与他接触率在单位时间内也是有限的. 因此在文献[9]中, Capasso 和 Serio 提出饱和增长率  $g(I)$ :

$$g(I) = \frac{\beta I}{1 + \alpha I},$$

收稿日期: 2010-05-10

修回日期: 2010-07-09

作者简介: 赵仕杰(1982-), 男, 硕士研究生, 主要从事生态数学研究.

其中发生率中  $\alpha$  为心理作用系数,即易感者知道染病者染病后,就会采取相应措施从而会影响发生率变化.从传染病传播规律看,饱和增长率更符合实际,研究饱和增长率的传染病模型更有利于提供有力的保护措施,从而预测疾病的进展情况.

基于上述考虑,本文研究的模型如下:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = rS(1 - \frac{S}{K}) - \frac{\beta SI(t-\tau)}{1 + \alpha I(t-\tau)} + \gamma I, \\ \frac{dI}{dt} = \frac{\beta SI(t-\tau)}{1 + \alpha I(t-\tau)} - (\gamma + d)I, \end{cases} \quad (1)$$

其中  $I(t)$  表示染病者在时刻  $t$  的人数,  $\gamma$  为移出率,  $d$  为疾病的死亡率,  $\tau$  为潜伏期,  $K, \alpha, \gamma, d$  均为正常数.

## 1 模型稳定性与 Hopf 分支

定义基本再生数

$$R_0 = \frac{\beta K}{d + \gamma},$$

当  $1 < R_0 < 2$  时,系统(1)存在唯一正平衡点  $E^* = (S^*, I^*)$ , 其中

$$S^* = \frac{(\gamma + d)(1 + \alpha I^*)}{\beta}, I^* =$$

$$\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

其中

$$a = \frac{\alpha^2 r (\gamma + d)^2}{K \beta^2}, b = d + \frac{2\alpha r (\gamma + d)^2}{K \beta^2} - \frac{\alpha r (\gamma + d)}{\beta}, c = \frac{r (\gamma + d)^2}{K \beta^2} - \frac{r (\gamma + d)}{\beta}.$$

系统(1)的线性化矩阵在正平衡点  $E^* = (S^*, I^*)$  特征方程为:

$$\lambda^2 + m_1 \lambda + m_0 + (n_1 \lambda + n_0) e^{-\lambda \tau} = 0, \quad (2)$$

其中

$$m_1 = d + \gamma + \frac{r S^*}{K} + \frac{\gamma I^*}{S^*}, m_0 = (d + \gamma) \left( \frac{r S^*}{K} + \frac{\gamma I^*}{S^*} \right) - \frac{\gamma \beta I^*}{1 + \alpha I^*},$$

$$n_1 = -\frac{d + \gamma}{1 + \alpha I^*}, n_0 = \frac{(d + \gamma) \beta I^*}{(1 + \alpha I^*)^2} - \frac{(d + \gamma) \left( \frac{r S^*}{K} + \frac{\gamma I^*}{S^*} \right)}{1 + \alpha I^*}.$$

**定理 1** 当  $1 < R_0 < 2$  时,如果条件(i)  $d > \alpha \gamma I^*$ , (ii)  $m_0 - n_0 < 0$  成立,则当  $\tau$  从零增加时,存在一个定值  $\tau_0$  使得当  $\tau \in [0, \tau_0)$  时,正平衡点  $E^*$  是局部渐近稳定的,当  $\tau > \tau_0$  时,正平衡点  $E^*$  不稳定,而当  $\tau = \tau_0$  时,系统(1)在平衡点附近发生 Hopf 分支.

**证明** 对于(2)式来说,首先证明正平衡点  $E^*$  稳定性.

当  $\tau = 0$  时,系统(2)化为

$$\lambda^2 + (m_1 + n_1) \lambda + m_0 + n_0 = 0. \quad (3)$$

由条件(i)可知  $\frac{(d + \gamma) \beta I^*}{(1 + \alpha I^*)^2} - \frac{\gamma \beta I^*}{1 + \alpha I^*} > 0$ , 所以有

$$m_1 + n_1 = (d + \gamma) \left( 1 - \frac{1}{1 + \alpha I^*} \right) + \frac{r S^*}{K} +$$

$$\frac{\gamma I^*}{S^*} > 0, m_0 + n_0 = (d + \gamma) \left( \frac{r S^*}{K} + \frac{\gamma I^*}{S^*} \right) \left( 1 - \frac{1}{1 + \alpha I^*} \right) + \frac{(d + \gamma) \beta I^*}{(1 + \alpha I^*)^2} - \frac{\gamma \beta I^*}{1 + \alpha I^*} > 0.$$

由 Routh - Hurwitz 判定准则知,等式(3)的所有根都具有负实部,则正平衡点  $E^*$  在  $\tau = 0$  时是局部渐近稳定的.

当  $\tau > 0$  时,设特征方程(2)有纯虚根  $\lambda = i\omega$  ( $\omega > 0$ ),代入(2)式分离实虚部得:

$$m_1 \omega = n_0 \sin \omega \tau - n_1 \omega \cos \omega \tau,$$

$$\omega^2 - m_0 = n_0 \cos \omega \tau + n_1 \omega \sin \omega \tau. \quad (4)$$

由(4)式得:

$$\omega^4 + (m_1^2 - 2m_0 - n_1^2) \omega^2 + m_0^2 - n_0^2 = 0. \quad (5)$$

因为

$$m_0 - n_0 = (d + \gamma) \left( \frac{r S^*}{K} + \frac{\gamma I^*}{S^*} \right) +$$

$$\frac{(d + \gamma) \left( \frac{r S^*}{K} + \frac{\gamma I^*}{S^*} \right) - \gamma \beta I^*}{1 + \alpha I^*} - \frac{(d + \gamma) \beta I^*}{(1 + \alpha I^*)^2},$$

$$m_1^2 - 2m_0 - n_1^2 = (d + \gamma)^2 \left( 1 - \frac{1}{(1 + \alpha I^*)^2} \right) +$$

$$\left( \frac{r S^*}{K} + \frac{\gamma I^*}{S^*} \right)^2 + \frac{2r \beta I^*}{1 + \alpha I^*} > 0.$$

由条件(i), (ii) 成立,则存在唯一、正的  $\omega_0$  满足等式(5).即特征方程(2)有一对形如  $\pm i\omega_0$  的纯虚根.由(4)式可知相应  $\omega_0$  的  $\tau_n$  为

$$\tau_n = \frac{1}{\omega_0} \arccos \frac{n_0 (\omega_0^2 - m_0) - m_1 n_1 \omega_0^2 + 2n\pi}{n_0^2 + n_1^2 \omega_0^2},$$

( $n = 0, 1, 2, \dots$ ).

当  $\tau = 0$  时,  $E^*$  是稳定的.因此由 Butler<sup>[10]</sup> 的引理知,当  $\tau < \tau_0$  时,  $E^*$  仍然保持稳定.这里  $\tau_0 = \tau_n$  ( $n = 0$ ).我们要证明

$$\frac{d(\operatorname{Re} \lambda)}{d\tau} \Big|_{\tau = \tau_0} > 0.$$

首先对(2)式关于  $\tau$  求导得

$$(2\lambda + m_1 + n_1 e^{-\lambda \tau} - \tau(n_1 \lambda + n_0) e^{-\lambda \tau}) \frac{d\lambda}{d\tau} =$$

$$\lambda(n_1 \lambda + n_0) e^{-\lambda \tau},$$

$$\left( \frac{d\lambda}{d\tau} \right)^{-1} = \frac{2\lambda + m_1 + n_1 e^{-\lambda \tau} - \tau(n_1 \lambda + n_0) e^{-\lambda \tau}}{\lambda(n_1 \lambda + n_0) e^{-\lambda \tau}}.$$

因此,

$$\text{sign} \left\{ \frac{d(\text{Re} \lambda)}{d\tau} \right\}_{\lambda=i\omega_0} = \text{sign} \left\{ \text{Re} \left( \frac{d\lambda}{d\tau} \right)^{-1} \right\}_{\lambda=i\omega_0} = \frac{\omega_0^4 + (n_0^2 - m_0^2)}{\omega_0^2 (n_0^2 + n_0^2 \omega_0^2)}$$

由  $m_0 - n_0 < 0$  得

$$\frac{d(\text{Re} \lambda)}{d\tau} \Big|_{\tau=\tau_0, \omega=\omega_0} > 0.$$

因此, Hopf 分支在  $\tau = \tau_0, \omega = \omega_0$  时发生.

## 2 模型 Hopf 分支方向及稳定性

采用文献[11]中规范型方法给出系统(1)的 Hopf 分支方向以及分支周期解的稳定性计算公式.

令  $x_1 = S - S^*, x_2 = I - I^*, \bar{x}_i(t) = x_i(\tau t), \tau = \tau_0 + \mu, \delta_1 = \frac{1}{1 + aI}$ , 为了方便起见, 去掉“—”, 则系统(1)变为

$$x(t) = L_\mu(x_t) + f(\mu, x_t), \quad (6)$$

其中  $x(t) = (x_1, x_2)^T \in R^2, x_t(\theta) = x(t + \theta)$  并且  $L_\mu: C \rightarrow R^2, f: R \times C \rightarrow R^2$  分别表示如下:

$$L_\mu(\phi) = (\tau_0 + \mu) \begin{bmatrix} -\frac{rS^*}{K} - \frac{\gamma I^*}{S^*} & \gamma \\ \delta_1 \beta I^* & -(\gamma + d) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1(0) \\ \phi_2(0) \end{bmatrix} + (\tau_0 + \mu) \begin{bmatrix} 0 & -\delta_1(\gamma + d) \\ 0 & \delta_1(\gamma + d) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1(-1) \\ \phi_2(-1) \end{bmatrix},$$

$$f = (\tau_0 + \mu) \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix},$$

其中  $f_1 = -\frac{r}{K} \phi_1^2(0) + \beta \alpha S^* \delta_1^3 \phi_2^2(-1) - \beta \delta_1^2 \phi_2(-1) \phi_1(0) + \beta \alpha \delta_1^3 \phi_2^2(-1) \phi_1(0) - \beta \alpha^2 \delta_1^4 S^* \phi_2^3(-1) + \dots, f_2 = -\beta \alpha S^* \delta_1^3 \phi_2^2(-1) + \beta \delta_1^2 \phi_2(-1) \phi_1(0) - \beta \alpha \delta_1^3 \phi_2^2(-1) \phi_1(0) + \beta \alpha^2 \delta_1^4 S^* \phi_2^3(-1) + \dots$

由 Riesz 表示定理, 存在分量为有界变差函数的二阶矩阵  $\eta(\theta, \mu): [-1, 0] \rightarrow R^2$ , 使得

$$L_\mu \phi = \int_{-1}^0 d\eta(\theta, \mu) \phi(\theta), \phi \in C.$$

事实上, 只取

$$\eta(\theta, \mu) = (\tau_0 + \mu) \begin{bmatrix} -\frac{rS^*}{K} - \frac{\gamma I^*}{S^*} & \gamma \\ \delta_1 \beta I^* & -(\gamma + d) \end{bmatrix} \delta(\theta) - (\tau_0 + \mu) \begin{bmatrix} 0 & -\delta_1(\gamma + d) \\ 0 & \delta_1(\gamma + d) \end{bmatrix} \delta(\theta + 1),$$

其中  $\delta$  表示狄拉克  $\delta$  函数. 对于  $\phi \in C([-1, 0], R^2)$ ,

定义

$$A(\mu) \phi = \begin{cases} \frac{d\phi(\theta)}{d\theta}, & \theta \in [-1, 0), \\ \int_{-1}^0 d\eta(\theta, \mu) \phi(\theta), & \theta = 0. \end{cases}$$

$$R(\mu) \phi = \begin{cases} 0, & \theta \in [-1, 0), \\ f(\mu, \phi), & \theta = 0. \end{cases}$$

则方程(6)可以写成泛函微分方程

$$\dot{x}_t = A(\mu)x_t + R(\mu)x_t, \quad (7)$$

其中  $x = (x_1, x_2)^T, x_t = x(t + \theta), \theta \in [-1, 0]$ . 记  $C^*$  是  $C$  的对偶空间,  $\eta(\theta) = \eta(\theta, 0)$  对于  $\varphi \in C([0, 1], (R^2)^*)$ , 定义

$$A^* \varphi(s) = \begin{cases} -\frac{d\varphi(s)}{ds}, & s \in (0, 1], \\ \int_{-1}^0 d\eta(t, 0) \varphi(-t), & s = 0. \end{cases}$$

定义双线性形式

$$\langle \varphi, \phi \rangle = \bar{\varphi}(0) \phi(0) - \int_{\theta=-1}^0 \int_{\xi=0}^{\theta} \bar{\varphi}(\xi - \theta) d\eta(\theta) \phi(\xi) d\xi, \quad (8)$$

其中  $\eta(\theta) = \eta(\theta, 0)$ .

$q(\theta)$  与  $q^*(s)$  分别是共轭算子  $A$  与  $A^*$  当  $\mu = 0$  时相应特征值  $i\omega_0$  和  $-i\omega_0$  的特征向量, 直接计算可得

$$q(\theta) = (1, \frac{\delta_1 \beta I^*}{(\gamma + d) + i\omega_0 - \delta_1(\gamma + d)e^{-i\omega_0 \tau_0}})^T e^{i\omega_0 \tau_0 \theta},$$

$$q^*(s) = D(1, \frac{(rS^{*2} + \gamma KI^*) - iKS^* \omega_0}{KS^* \delta_1 \beta I^*}) e^{i\omega_0 \tau_0 s}.$$

满足  $\langle q^*, q \rangle = 1, \langle q^*, \bar{q} \rangle = 1$ , 其中  $D =$

$$\frac{1}{1 + q_1 q_1^* + \tau_0 (\gamma + d) \delta_1 q_1 (-1 + q_1^*) e^{i\omega_0 \tau_0}}$$

计算在  $\mu = 0$  处决定中心流形的变量. 设  $x_t$  是当  $\mu = 0$  时(6)式的解, 定义

$$\dot{z}(t) = \langle q^*(\theta), x_t \rangle, w(t, \theta) = x_t - 2\text{Re} \{ z(t) q(\theta) \}. \quad (9)$$

在中心流形  $C_0$  上, 有  $w(z, \bar{z}) = (z(t), \bar{z}(t), \theta)$ , 其中

$$w(z, \bar{z}, \theta) = \frac{w_{20} z^2}{2} + w_{11} z \bar{z} + \frac{w_{02} \bar{z}^2}{2} + \dots \quad (10)$$

$z$  和  $\bar{z}$  是  $q^*$  和  $\bar{q}^*$  方向上中心流形  $C_0$  上的局部变量. 注意  $x_t$  是实数. 则  $w$  是实数, 在这里只考虑实数解, 因为  $\mu = 0$ , 对于(7)式的解  $x_t \in C_0$ , 有:

$$\dot{z}(t) = \langle q^*(\theta), \dot{x}(t) \rangle = i\omega_0 z + \bar{q}^*(0) f_0(z, \bar{z}).$$

(11) 式可以写为

$$\dot{z}(t) = i\omega_0 z(t) + g(z, \bar{z}),$$

其中

$$g(z, \bar{z}) = g_{20} \frac{z^2}{2} + g_{11} z\bar{z} + g_{02} \frac{\bar{z}^2}{2} + g_{21} \frac{z^2 \bar{z}}{2} + \dots$$

通过比较系数可以得到

$$g_{20} = 2\tau_0 \bar{D} \{ (\bar{q}_1 * -1) (-\beta \alpha S * \delta_1^2 q_1^2 e^{-2i\omega_0 \tau_0} + \beta \delta_1^2 q_1 e^{-i\omega_0 \tau_0}) - \frac{r}{K} \},$$

$$g_{11} = 2\tau_0 \bar{D} \{ (\bar{q}_1 * -1) (-\beta \alpha S * \delta_1^3 |q_1|^2 + \beta \delta_1^2 \operatorname{Re} \{ q_1 e^{-i\omega_0 \tau_0} \}) - \frac{r}{K} \},$$

$$g_{02} = 2\tau_0 \bar{D} \{ (\bar{q}_1 * -1) (-\beta \alpha S * \delta_1^3 \bar{q}_1^2 e^{2i\omega_0 \tau_0} + \beta \delta_1^2 \bar{q}_1 e^{i\omega_0 \tau_0}) - \frac{r}{K} \},$$

$$g_{21} = \tau_0 \bar{D} \{ (\bar{q}_1 * -1) [ (-\beta \alpha S * \delta_1^3 (2w_{20}^{(2)} (-1) \bar{q}_1 e^{i\omega_0 \tau_0} + 4w_{11}^{(2)} (-1) q_1 e^{-i\omega_0 \tau_0})) + \beta \delta_1^2 (w_{20}^{(1)}(0) \bar{q}_1 e^{i\omega_0 \tau_0} + w_{20}^{(2)}(-1) + 2w_{11}^{(1)}(0) q_1 e^{-i\omega_0 \tau_0} + 2w_{11}^{(2)}(-1) - \beta \alpha \delta_1^3 (2q_1 e^{-2i\omega_0 \tau_0} + 4|q_1|^2) + \beta \alpha^2 S * \delta_1^4 (6q_1^2 |q_1|^2 e^{-i\omega_0 \tau_0})] - \frac{r}{K} (2w_{20}^{(1)}(0) + 4w_{11}^{(1)}(0)) \},$$

其中

$$W_{20}(\theta) = \frac{i g_{20}}{\omega_0 \tau_0} q(0) e^{i\omega_0 \theta} + \frac{\bar{i} g_{02}}{3\omega_0 \tau_0} \bar{q}(\theta) e^{-i\omega_0 \theta} + e^{2i\omega_0 \theta} E_1,$$

$$W_{11}(\theta) = -\frac{i g_{11}}{\omega_0 \tau_0} q(0) e^{i\omega_0 \theta} + \frac{\bar{i} g_{11}}{\omega_0 \tau_0} \bar{q}(\theta) e^{-i\omega_0 \theta} +$$

$E_2,$

其中

$$E_1 = 2 \cdot$$

$$\begin{pmatrix} 2i\omega_0 + \frac{rS^*}{K} + \frac{\gamma I^*}{S^*} & (\gamma + d)\delta_1 e^{-2i\omega_0 \tau_0} - \gamma \\ -\beta \delta_1 I^* & 2i\omega_0 + (\gamma + d) - (\gamma + d)\delta_1 e^{-2i\omega_0 \tau_0} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \beta \alpha S * \delta_1^2 q_1^2 e^{-2i\omega_0 \tau_0} - \beta \delta_1^2 q_1 e^{i\omega_0 \tau_0} - \frac{r}{K} \\ -\beta \alpha S * \delta_1^2 q_1^2 e^{-2i\omega_0 \tau_0} + \beta \delta_1^2 q_1 e^{i\omega_0 \tau_0} \end{pmatrix},$$

$$E_2 = 2 \begin{pmatrix} \frac{rS^*}{K} + \frac{\gamma I^*}{S^*} & (\gamma + d)\delta_1 - \gamma \\ -\beta \delta_1 I^* & (\gamma + d) - (\gamma + d)\delta_1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot$$

$$\begin{pmatrix} \beta \alpha S * \delta_1^3 |q_1|^2 - \beta \delta_1^2 \operatorname{Re} \{ q_1 e^{i\omega_0 \tau_0} \} - \frac{r}{K} \\ -\beta \alpha S * \delta_1^3 |q_1|^2 + \beta \delta_1^2 \operatorname{Re} \{ q_1 e^{i\omega_0 \tau_0} \} \end{pmatrix}.$$

(11) 这样可以确定  $g_{21}$ , 所以  $g_{02}, g_{11}, g_{20}$  都可以确定. 同时可以计算下列值:

$$c_1(0) = \frac{i}{2\omega_0} (g_{11} g_{20} - 2|g_{11}|^2 - \frac{|g_{02}|^2}{3}) + \frac{g_{21}}{2},$$

$$\sigma_2 = \frac{\operatorname{Re} \{ c_1(0) \}}{\operatorname{Re} \{ \lambda'(\tau_0) \}}, \zeta_2 = 2 \operatorname{Re} \{ c_1(0) \}, T_2 = \frac{\operatorname{Im} \{ c_1(0) \} + \zeta_2 \operatorname{Im} \{ \lambda'(\tau_0) \}}{\omega_0}.$$

定理 2 (i)  $\sigma_2$  决定了 Hopf 分支的方向: 如果  $\sigma_2 > 0 (< 0)$ , 产生超临界 Hopf 分支 (次临界); (ii)  $\zeta_2$  决定了 Hopf 分支稳定性: 如果  $\zeta_2 > 0 (< 0)$ , 周期解是不稳定的 (稳定); (iii)  $T_2$  决定了分支周期解的周期: 如果  $T_2 > 0 (< 0)$ , 分支周期解的周期增加 (减少).

### 3 数值模拟

我们选取如下数值:  $\gamma = 0.4, K = 2, \beta = 1, \alpha = 0.01, r = 0.001, d = 0.8$ , 使用 Matlab 软件进行数值模拟, 可以求得正平衡点  $E^* = (1.2001, 0.006)$ ,  $\omega_0 = 0.0473, \tau_0 = 0.9514$ . 由定理 1 可得正平衡点  $E^*$  是局部渐近稳定的 (图 1). 由定理 2 可知系统 (1) 在正平衡点  $E^*$  附近产生分支周期解 (图 2).

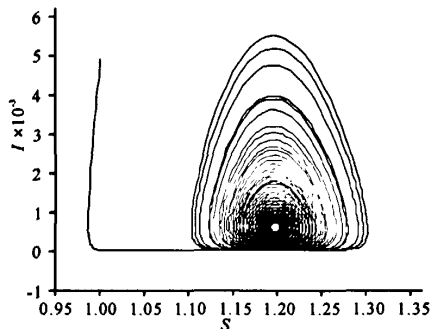


图 1  $\tau = 0.6 < \tau_0$  时的系统 (1) 的相图

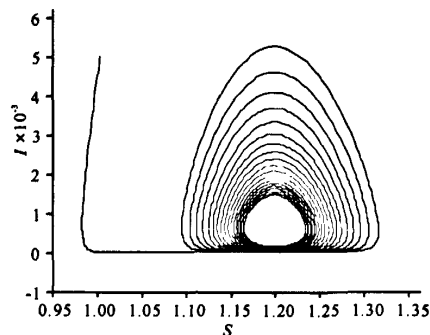


图 2  $\tau = 1.2 > \tau_0$  时的系统 (1) 相图

(下转第 16 页)

- [3] 陈斌,高守恩,焦正宽. 低温下介观电路的量子涨落[J]. 物理学报, 1995, 44(9): 1480-1483.
- [4] 陈斌,方挥,焦正宽,等. 介观电路中电荷、电流的量子涨落[J]. 科学通报, 1996, 41(13): 1170-1172.
- [5] 陈斌,李有泉,沙健,等. 介观耦合电路的量子压缩效应[J]. 科学通报, 1996, 41(14): 1275-1277.
- [6] Li Youquan, Chen Bin. Quantum theory for mesoscopic electric circuits[J]. Phys Rev B, 1996, 53(7): 4027-4032.
- [7] 陈斌,李有泉,沙健,等. 介观电路中电荷的量子效应[J]. 物理学报, 1997, 46(1): 0129-0133.
- [8] 王继锁,孙长勇. 压缩真空态下介观电路的量子涨落[J]. 物理学报, 1997, 46(10): 2007-2009.
- [9] Wang Jisuo, Sun Changyong. Quantum effects of mesoscopic RLC circuit in squeezed vacuum state[J]. International Journal of Theoretical Physics, 1998, 37(4): 1213-1216.
- [10] Yu Zhaoxian, Zhang Dexing, Liu Yehou. Quantum mechanical effects of a nondissipative mesoscopic capacitance coupling circuit with source[J]. International Journal of Theoretical Physics, 1997, 36(9): 1965-1971.
- [11] Yu Zhaoxian, Liu Yehou. Coulomb blockade and quantum fluctuation of a nondissipative mesoscopic capacitance coupling circuit with source[J]. International Journal of Theoretical Physics, 1998, 37(4): 1217-1223.
- [12] Zhang Zhiming, He Linsheng, Zhou Shikang. A quantum theory of an RLC circuit with a source[J]. Physics Letters A, 1998, 244(4): 196-200.
- [13] Fan Hongyi, PAN Xiaoyin. Quantization and squeezed state of two LC circuit with mutual-inductance[J]. Chinese Physics Letters, 1998, 15(9): 625-627.
- [14] 崔元顺. 介观 LC 电路中电压、电流的量子涨落[J]. 光子学报, 1998, 27(6): 517-520.
- [15] 刘艳辉,金哲,张寿. 有源 RLC 介观电路的量子涨落[J]. 量子光学学报, 2002, 8(3): 118-120.
- [16] 顾永建. 关于有源 RLC 电路的量子化[J]. 大学物理, 2000, 19(6): 12-13, 48.
- [17] Wang Jisuo, Liu Tangkun, Zhan Mingsheng. Quantum wave functions and fluctuations of mesoscopic RLC circuit[J]. Chinese Physics Letters, 2000, 17(7): 528-529.
- [18] 梁麦林,袁兵. 关于介观有源 RLC 电路的量子化及其量子涨落[J]. 量子电子学报, 2002, 19(1): 53-56.

(责任编辑: 韦廷宗)

(上接第9页)

参考文献:

- [1] Kermack W O, McKendrick A G. Contribution to the mathematical theory of epidemic[J]. Proc Roy Soc, 1932, 138(1): 55-83.
- [2] Li J, Ma Z. Qualitative analyses of SIS epidemic model with vaccination varying total population size[J]. Mathematical and Computer Modelling, 2002, 35: 1235-1243.
- [3] P Van Den Driessche, James Watmough. Reproduction numbers and sub-threshold endemic equilibria for compartmental models of disease transmission[J]. Mathematical Biosciences, 2002, 180(special issue): 29-48.
- [4] Eichner M, Haderl K P. Deterministic models for the eradication of poliomyelitis: vaccination with the inactivated (IPV) and attenuated (OPV) polio virus vaccine[J]. Mathematical Biosciences, 1995, 127(2): 149-166.
- [5] 徐为坚. 具有种群 Logistic 增长饱和和传染率的 SIS 模型的稳定性和 Hopf 分支[J]. 数学物理学报, 2008, 28A(3): 578-584.
- [6] Fan M, Li M Y, Wang K. Global stability of an SEIS epidemic model with recruitment and a varying total Population size[J]. Mathematical Biosciences, 2001, 170: 199-208.
- [7] Li J, Zhang J, Ma Z. Global analysis of some epidemic models with general contact rate and constant immigration[J]. Applied mathematical and mechanics, 2004, 25(4): 396-404.
- [8] 李建全, 马知恩. 一类带有接种的流行模型的全局稳定性[J]. 数学物理学报, 2006, 26A(1): 021-030.
- [9] Capasso V, Serio G. A generalization of the Kermack-Mckendrick deterministic epidemic model[J]. Math Biosci, 1978, 42: 41-61.
- [10] Freedman H I, Sree Hari Rao V. The trade off between mutual interference and time lags in predator-prey systems[J]. Bull Math Biol, 1983, 45: 991-1003.
- [11] Hassard B, Kazarinoff N, Wan Y H. Theory and applications of Hopf Bifurcation. London Math[M]. Sok Lect Notes, Series, 41. Cambridge: Cambridge Univ Press, 1981.

(责任编辑: 韦廷宗)