一种求解非线性互补问题的光滑牛顿方法*

A Smoothing Newton Method for Solving Nonlinear Complementarity Problem

陈　争[1]，马昌凤[2]

CHEN Zheng[1], MA Chang-feng[2]

(1. 福建江夏学院信息系，福建福州　350108；2. 福建师范大学数学与计算机科学学院，福建福州　350007)

(1. Department of Information Fujian Jiangxia College, Fuzhou, Fujian, 350108, China; 2. School of Mathematics and Computer Science, Fujian Normal University, Fuzhou, Fujian, 350007, China)

摘要：针对非线性互补问题，构造一个新的光滑逼近函数，分析该函数的一些基本性质，再利用该函数建立求解非线性互补问题的光滑牛顿算法，证明在适当的条件下这一算法是全局及局部超线性收敛的，最后用数值算例验证该算法是有效的.

关键词：非线性互补　光滑逼近函数　光滑牛顿法　收敛性　数值实验

中图法分类号：O224.2　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1002-7378(2011)01-0001-05

Abstract: A new smoothing approximation function of NCP is given and some properties of function are analyzed. By this new function, a new Jacobian smoothing method for P_0-NCP is proposed. The presented method is globally and locally superlinearly convergent under suitable conditions. Some numerical results show that this method is effective.

Key words: nonlinear complementarity, smoothing approximation function, smoothing Newton method, convergence, numerical experiment

非线性互补问题与数学规划、变分不等式、不动点问题及对策论等有着密切的联系[1,2]. 其数学模型是指：求向量 $x \in R^n$，使得

$$x \geqslant 0, F(x) \geqslant 0, x^{\mathrm{T}} F(x) = 0, \tag{1}$$

其中 $F: R^n \to R^n$ 是连续可微的非线性向量值函数.

非线性互补问题应用广泛，其理论特别是算法的研究很受重视，已报道有多种数值算法来求解问题(1). 建立算法的基本思想是将问题(1)转化为等价的非线性方程组或非线性最优化问题来求解. 近几年，研究者又对求解非线性互补问题光滑化方法产生了浓厚的兴趣[3~7]. 而构造光滑化方法的关键问题之一是构造“分析”和“计算”性质俱佳的光滑逼近函数. 本文提出一个新的光滑逼近函数，并利用这一函数建立一个新的光滑牛顿法，给出算法的收敛性分析. 最后通过一些数值实例验证所提出的算法的有效性.

我们假设问题(1)中的 F 是连续可微的 P_0 函数，即 F 满足：

$$\max_{1 \leqslant i \leqslant n, x_i \neq y_i} (x_i - y_i)[F_i(x) - F_i(y)] \geqslant 0,$$

$\forall x, y \in R^n$.

1　新的光滑逼近函数及其性质

称函数 $\varphi(a,b)$ 是一个 NCP 函数，如果满足：

$$\varphi(a,b) = 0 \Leftrightarrow a \geqslant 0, b \geqslant 0, ab = 0.$$

不难发现，min 函数 $\varphi_{\min}(a,b) = \min\{a,b\}$ 是一个 NCP 函数. 那么问题(1)可以转化为非线性方程组来求解：

$$\Phi(x) := \begin{pmatrix} \varphi_{\min}(x_1, F_1(x)) \\ \vdots \\ \varphi_{\min}(x_n, F_n(x)) \end{pmatrix} = 0.$$

收稿日期：2010-09-28
修回日期：2010-10-19

作者简介：陈　争(1959-)，男，讲师，主要从事最优化理论与算法研究.

*国家自然科学基金项目(11071041)，福建省自然科学基金项目(2009J01002)资助.

由于函数 $\varphi_{\min}(a,b)$ 在 $a=b$ 处是不光滑的，因而无法使用传统的牛顿法来求解此非线性方程组. 为此，提出 min 函数的一个光滑逼近函数，以便通过该光滑逼近函数将问题(1)转化为序列光滑方程组求解.

定义函数 $\varphi:(0,1)\times R^2\to R$ 如下：

$$\varphi(\mu,a,b)=\begin{cases}a+\mu b, a<b,\\ \mu a+b+\mu(1-e^{-\frac{1-\mu}{\mu}(a-b)}), a\geqslant b.\end{cases}\tag{2}$$

引理 1 函数 $\varphi(\mu,a,b)$ 是 min 函数 $\varphi_{\min}$ 的光滑逼近函数，且

$$\varphi'_{\mu}(\mu,a,b)=\begin{cases}b, a<b,\\ a+1-\left(1+\frac{a-b}{\mu}\right)e^{-\frac{1-\mu}{\mu}(a-b)}, a\geqslant b,\end{cases}\tag{3}$$

$$\varphi'_{a}(\mu,a,b)=\begin{cases}1, a<b,\\ \mu+(1-\mu)e^{-\frac{1-\mu}{\mu}(a-b)}, a\geqslant b,\end{cases}\tag{4}$$

$$\varphi'_{b}(\mu,a,b)=\begin{cases}\mu, a<b,\\ 1-(1-\mu)e^{-\frac{1-\mu}{\mu}(a-b)}, a\geqslant b.\end{cases}\tag{5}$$

对于 $0<\mu<1$，通过直接计算即可证明 $\varphi_{\mu}(a,b)$ 的光滑性及(3)式，(4)式和(5)式. 此外，显然有 $\lim\limits_{\mu\to 0}\varphi_{\mu}(a,b)=\varphi_{\min}(a,b)$.

利用光滑逼近函数(2)，问题(1)可以转化为带约束的非线性方程组：

$$H(z):=H(\mu,x)=\begin{pmatrix}\mu\\ \Phi(z)\end{pmatrix}=0,\tag{6}$$

其中

$$\Phi(z):=\Phi(\mu,x)=\begin{bmatrix}\varphi(\mu,x_1,F_1(x))\\ \vdots\\ \varphi(\mu,x_n,F_n(x))\end{bmatrix}.\tag{7}$$

不难证明，当 $0<\mu<1$ 时，$H(z)$ 是光滑的，且其 Jacobi 矩阵 $H'(z)$ 为

$$H'(z)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ v(z) & D_a(z)+D_b(z)F'(x)\end{pmatrix}.\tag{8}$$

这里

$$v(z)=(v_1(z),v_2(z),\cdots,v_n(z))^{\mathrm T},$$
$$D_a(z)=\mathrm{diag}\{a_1(z),a_2(z),\cdots,a_n(z)\},$$
$$D_b(z)=\mathrm{diag}\{b_1(z),b_2(z),\cdots,b_n(z)\},$$

其中

$$v_i(z)=\begin{cases}F_i(x), i\notin\alpha(x),\\ x_i+1-\left(1+\frac{x_i-F_i(x)}{\mu}\right)e^{-\frac{1-\mu}{\mu}(x_i-F_i(x))},\\ \quad i\in\alpha(x),\end{cases}$$

$$a_i(z)=\begin{cases}1, i\notin\alpha(x),\\ \mu+(1-\mu)e^{-\frac{1-\mu}{\mu}(x_i-F_i(x))},\\ \quad i\in\alpha(x),\end{cases}$$

$$b_i(z)=\begin{cases}\mu, i\notin\alpha(x),\\ 1-(1-\mu)e^{-\frac{1-\mu}{\mu}(x_i-F_i(x))},\\ \quad i\in\alpha(x),\end{cases}$$

指标集 $\alpha(x)=\{i:x_i\geqslant F_i(x)\}$. 不难发现，当 $0<\mu<1$ 时，有

$$0<a_i(z)\leqslant 1,\ 0<b_i(z)\leqslant 1, i=1,\cdots,n.\tag{9}$$

引理 2 $\Phi_{\mu}(x)$ 满足 Jacobian 相容性，即 $\lim\limits_{\mu\to 0}\mathrm{dist}(\Phi'_{\mu}(x),\partial_c\Phi(x))=0$.

证明 只需证明

$$\lim_{\mu\to 0}\mathrm{dist}(\nabla\varphi_{\mu}(x_i,F_i(x)),\partial\varphi_{\min}(x_i,F_i(x)))=0\tag{10}$$

即可，其中 $\partial\varphi_{\min}(x_i,F_i(x))$ 是 $\varphi_{\min}(x_i,F_i(x))$ 的广义梯度. 由于

$$\nabla_x(\mu,x_i,F_i(x))=\begin{cases}e_i+\mu\nabla F_i(x), i\notin\alpha(x),\\ \mu e_i+\nabla F_i(x)+(1-\mu)e^{-\frac{1-\mu}{\mu}(x_i-F_i(x))}(e_i-\\ \quad\nabla F_i(x)), i\in\alpha(x),\end{cases}\tag{11}$$

其中 e_i 是第 i 个坐标为 1 其余坐标均为 0 的 n 维单位向量. 注意到

$$\partial\varphi_{\min}(x_i,F_i(x))=\begin{cases}e_i, & \text{若 } x_i<F_i(x),\\ \{e_i,\nabla F_i(x)\}, & \text{若 } x_i=F_i(x),\\ \nabla F_i(x), & \text{若 } x_i>F_i(x).\end{cases}$$

那么由上式及(11)式立即可得(10)式成立.

引理 3 设 F 是 P_0-函数，H 由(6)式所定义. 那么对于任意的 $0<\mu<1$ 和 $x\in R^n$，H 是连续可微的，且其 Jacobian 矩阵 $H'(z)$ 是非奇异的.

证明 由(8)式可知，只需证明 $D_a(z)+D_b(z)F'(x)$ 非奇异即可. 显然，对于 $0<\mu<1$，由(9)式可知，对角矩阵 $D_a(z)$，$D_b(z)$ 都是正定的. 另外，由于 $F(x)$ 是 P_0 函数，故其 Jacobian 矩阵 $F'(x)$ 是 P_0 矩阵. 从而由 P_0 矩阵的性质，可推出 $\nabla\Phi_{\mu}(x)=D_a(x)+D_b(x)\nabla F(x)$ 是非奇异的.

2 光滑牛顿法及其收敛性

利用光滑逼近函数，建立求解问题(1)的一个 Jacobi 光滑化方法. 对于 $\gamma\in(0,1)$，令 $\delta:R^{n+1}\to R_+$ 为

$$\delta(x):=\gamma\min\{\|H(z)\|,\|H(z)\|^2\}.\tag{12}$$

算法 1 (Jacobian 光滑化方法)

步骤 0 选取参数 $\rho,\sigma\in(0,1)$，$\mu_0\in(0,1)$，及初始点 $x_0\in R^n$. 令 $\bar z=(\mu_0,0)\in R_{++}\times R^n$，$z^0=$

(μ_0, x^0). 选取 $\gamma \in (0,1)$ 使满足 $\gamma \| H(z^0) \| < 1$ 及 $\gamma\mu_0 < 1$. 置 $k := 0$.

步骤 1　若 $\| H(z^k) \| = 0$, 停算;否则,记 $\delta_k := \delta(z^k)$, 转步骤 2.

步骤 2　求解方程组

$$H(z^k) + H'(z^k)\Delta z^k = \delta_k \bar{z}, \tag{13}$$

得 $\Delta z^k = (\mu_k, x^k) \in R^{n+1}$.

步骤 3　令 m_k 为满足下面不等式的最小非负整数 m:

$$\| H(z^k + \rho^m \Delta z^k) \| \leqslant [1 - \sigma(1 - \gamma\mu_0)\rho^m] \| H(z^k) \|, \tag{14}$$

置 $\lambda_k = \rho^{m_k}$, $z^{k+1} := z^k + \lambda_k \Delta z^k$.

步骤 4　令 $k := k+1$, 转步骤 1.

定义集合 $\Omega = \{z = (\mu, x) \in R^{n+1} : \mu \geqslant \delta(z)\mu_0\}$.

定理 1　设 F 是 P_0 函数, 那么算法 1 是适定的, 且生成的无穷序列 $\{z^k = (\mu_k, x^k)\}$ 对所有的 $k \geqslant 0$ 满足 $\{\mu_k\} \subset (0,1)$ 是单调下降的且 $z^k \in \Omega$.

证明　用数学归纳法证明 $z^k \in \Omega$. 显然, $z^0 \in \Omega$. 假设 $z^k \in \Omega$. 由(17)式及 $\mu_k \geqslant \delta_k\mu_0$, 有

$$\mu_{k+1} - \delta_{k+1}\mu_0 = (1 - \lambda_k)\mu_k + \lambda_k\delta_k\mu_0 - \delta_{k+1}\mu_0 \geqslant \mu_k - \delta_{k+1}\mu_0 \geqslant \mu_0(\delta_k - \delta_{k+1}). \tag{15}$$

一方面, 若 $\| H(z^k) \| > 1$, 则 $\delta_k = \gamma \| H(z^k) \|^2$, 否则, $\delta_k = \gamma \| H(z^k) \|$. 另一方面, 由线搜索(14)式及 $\delta(\cdot)$ 的定义, 有

$$\| H(z^{k+1}) \| \leqslant \| H(z^k) \|, \delta_{k+1} \leqslant \gamma \| H(z^{k+1}) \|, \delta_{k+1} \leqslant \gamma \| H(z^{k+1}) \|^2.$$

容易推出 $\mu_{k+1} - \delta_{k+1}\mu_0 \geqslant 0$, 即 $z^{k+1} \in \Omega$. 那么对任何 $k \geqslant 0$, $z^k \in \Omega$. 注意到 $z^k \in \Omega, \forall k \geqslant 0$, 即 $\mu_k \geqslant \delta_k\mu_0$, 故 $\Delta\mu_k = -\mu_k + \delta_k\mu_0 \leqslant 0$. 从而 $\mu_{k+1} = \mu_k + \lambda_k\Delta\mu_k \leqslant \mu_k$, 即 $\{\mu_k\}$ 是单调下降的. 注意到 $\mu_0 < 1$, 可知对所有的 $k \geqslant 0$, $0 < \mu_k < 1$.

由于 $0 < \mu_k < 1$, 又因 F 是连续可微的 P_0 函数, 故利用引理 2 可知 $H'(z^k)$ 是非奇异的, 故算法的步骤 2 在第 k 步是适定的.

对于 $\forall \alpha \in (0,1]$, 定义

$$r(\alpha) := H(z^k + \alpha\Delta z^k) - H(z^k) - \alpha H'(z^k)\Delta z^k. \tag{16}$$

由(13)式得

$$\Delta z^k = -\mu_k + \delta_k\mu_0, \tag{17}$$

因此, 对任意的 $\alpha \in (0,1]$ 有

$$\mu_k + \alpha\Delta\mu_k = (1 - \alpha)\mu_k + \alpha\delta_k\mu_0 > 0. \tag{18}$$

由于 F 是连续可微的, 故由引理 3 可知 H 在 z^k 处也是连续可微的. 故(15)式意味着

$$\| r(\alpha) \| = o(\alpha). \tag{19}$$

再由(12)式, 有

$$\delta_k \leqslant \gamma \| H(z^k) \|, \delta_k \leqslant \gamma \| H(z^k) \|^2. \tag{20}$$

故由(16)式, (19)式, (20)式及(13)式, 对任意的 $\alpha \in (0,1]$ 有

$$\| H(z^k + \alpha\Delta z^k) \| \leqslant \| r(\alpha) \| + (1 - \alpha) \| H(z^k) \| + \alpha\delta_{k\mu_0} \leqslant (1 - \alpha) \| H(z^k) \| + \alpha\gamma\mu_0 \| H(z^k) \| + o(\alpha) = [1 - (1 - \gamma\mu_0)\alpha] \| H(z^k) \| + o(\alpha).$$

由上式可知, 存在常数 $\bar{\alpha} \in (0,1]$, 使得对任意的 $\alpha \in (0, \bar{\alpha}]$,

$$\| H(z^k + \alpha\Delta z^k) \| \leqslant [1 - \sigma(1 - \gamma\mu_0)\alpha] \| H(z^k) \|, \tag{21}$$

即算法的步骤 3 在第 k 步迭代是适定的. 因此, 由(17)式及算法的步骤 3 可知, $\lambda_k \in (0,1]$, $\mu_{k+1} = (1 - \lambda_k)\mu_k + \lambda_k\delta_k\mu_0 > 0$.

引理 4　设 F 是 P_0 函数, $H(z)$ 由(6)式定义. 对任意的 $0 < \mu < 1$, 定义水平集

$$L_\mu(z^0) = \{z = (\mu, x) \in (0,1) \times R^n : \| H(z) \| \leqslant \| H(z^0) \| \}. \tag{22}$$

则对任意的 $0 < \mu_1 \leqslant \mu_2 < 1$, 集合 $L(z^0) = \bigcup_{\mu_1 \leqslant \mu \leqslant \mu_2} L_\mu(z^0)$ 是有界的.

证明　用反证法. 假定存在序列 $\{z^k = (\mu_k, x^k)\}$ 使得

$$\mu_1 \leqslant \mu_k \leqslant \mu_2, \quad \| H(z^k) \| \leqslant \| H(z^0) \|, \quad \| x^k \| \to \infty. \tag{23}$$

因为 $\{x^k\}$ 无界, 故指标集 $J = \{i \in N : | x_i^k | \to \infty, k \to \infty\}$ 非空. 作序列 $\bar{x}^k$:

$$\bar{x}_k^i = \begin{cases} 0, & i \in J, \\ x_i^k, & i \notin J, \end{cases}$$

易知 $\{\bar{x}^k\}$ 是有界的. 注意到 F 是 P_0 函数, 有

$$0 \leqslant \max_{1 \leqslant i \leqslant n}(x_i^k - \bar{x}_k^i)[F_i(x^k) - F_i(\bar{x}^k)] = \max_{i \in J}[F_i(x^k) - F_i(\bar{x}^k)] = x_{i_0}[F_{i_0}(x^k) - F_{i_0}(\bar{x}^k)]. \tag{24}$$

这里 i_0 是使(24)式第 1 个等式右边取最大值的指标之一. 因为 $i_0 \in J$, 故有

$$\lim_{k \to \infty} | x_{i_0}^k | = +\infty. \tag{25}$$

分两种情形讨论.

(i) $x_{i_0}^k \to +\infty, k \to \infty$. 此时, 由 $F_{i_0}(\bar{x}^k)$ 的有界性及(24)式可知 $F_{i_0}(x^k)$ 不趋于 $-\infty$. 注意到 $0 < \mu_1 \leqslant \mu_k \leqslant \mu_2$, 可得

$$x_{i_0}^k+\mu_k F_{i_0}(x^k)\to+\infty,\ \mu_k x_{i_0}^k+F_{i_0}(x^k)\to+\infty,$$

故由(2)式,可得 $\lim\limits_{k\to\infty}|\varphi(\mu_k,x_{i_0},F_{i_0}(x^k))|=+\infty$.

(ii)$x_{i_0}^k\to-\infty,k\to\infty$. 此时,由 $F_{i_0}(\bar{x}^k)$ 的有界性及(24)式可知 $F_{i_0}(x^k)\leqslant F_{i_0}(\bar{x}^k)$. 注意到 $0<\mu_1\leqslant\mu_k\leqslant\mu_2$,可得

$$x_{i_0}^k+\mu_k F_{i_0}(x^k)\to-\infty,\mu_k x_{i_0}^k+F_{i_0}(x^k)\to-\infty,$$

故由(2)式也可得 $\lim\limits_{k\to\infty}|\varphi(\mu_k,x_{i_0},F_{i_0}(x^k))|=+\infty$.
也就是说,无论哪种情形,都有

$$\|\Phi(z^k)\|:=\|\Phi(\mu_k,x^k)\|\to+\infty(k\to\infty),$$

亦即

$$\lim_{k\to\infty}\|H(z^k)\|^2=\lim_{k\to\infty}(\mu_k^2+\|\Phi(z^k)\|^2)=+\infty.$$

这与(23)式矛盾.

定理2 设 F 是 P_0 函数,$\{z^k=(\mu_k,x^k)\}$ 是由算法1产生的无穷序列,则 $\{z^k\}$ 的任何聚点 z^* 都是(6)式的解,即 $H(z^*)=0$.

证明 由(14)式及定理1知,$\{\|H(z^k)\|\}$ 是单调下降的且 $\{z^k\}\subset\Omega$. 因此,由 $\delta(\cdot)$ 的定义,可知 $\{\|H(z^k)\|\}$ 和 $\{\delta_k\}$ 都是收敛的. 故存在 h^*,$\delta^*\geqslant 0$,使得

$$\lim_{k\to\infty}\|H(z^k)\|=h^*,\lim_{k\to\infty}\delta_k=\delta^*.$$

若 $h^*=0$,则由 H 的连续性即可得到定理2的结论. 再证明不可能出现 $h^*>0$. 事实上,若 $h^*>0$,则 $\delta^*=\gamma\min\{h^*,(h^*)^2\}>0$. 由定理1可知 $0<\delta^*\mu_0\leqslant\mu_k\leqslant\mu_0,\forall k\geqslant 0$. 显然有

$$z^k\in L(z^0)=\bigcup_{\delta^*\mu_0\leqslant\mu_k\leqslant\mu_0}L_{\mu_k}(z^0),$$

其中 $L_{\mu_0}(z^0)$ 由(22)式所定义. 注意由引理4知 $L(z^0)$ 是有界的,那么序列 $\{z^k\}$ 也是有界的,故必存在收敛的子序列. 不失一般性,设 $\lim\limits_{k\to\infty}z^k=z^*$. 由(14)式可知,必有 $\lim\limits_{k\to\infty}\rho^{m_k}=0$. 于是,由算法1的步骤3可得

$$\|H(z^k+\rho^{m_k-1}\Delta z^k)\|>[1-\sigma(1-\gamma\mu_0)\rho^{m_k-1}]\|H(z^k)\|.$$

将上式重新整理可得

$$\frac{\|H(z^k+\rho^{m_k-1}\Delta z^k)\|-\|H(z^k)\|}{\rho^{m_k-1}}>-\sigma(1-\gamma\mu_0)\|H(z^k)\|. \quad (26)$$

以 $\|H(z^k+\rho^{m_k-1}\Delta z^k)\|+\|H(z^k)\|$ 乘(26)式两边并令 $k\to\infty$ 得

$$2H(z^*)^{\mathrm{T}}H'(z^*)\Delta z^*\geqslant-2\sigma(1-\gamma\mu_0)\|H(z^*)\|^2. \quad (27)$$

再用 $H(z^k)$ 与(13)式两边做内积并令 $k\to\infty$,得

$$H(z^*)^{\mathrm{T}}H'(z^*)\Delta z^*=-\|H(z^*)\|^2+\delta^*H(z^*)\bar{z}. \quad (28)$$

由(27)式和(28)式可得

$$[1-\sigma(1-\gamma\mu_0)]\|H(z^*)\|^2\leqslant\delta^*H(z^*)\bar{z}\leqslant\delta^*\mu_0\|H(z^*)\|\leqslant\gamma\mu_0\|H(z^*)\|^2. \quad (29)$$

注意到 $\|H(z^*)\|=h^*>0$,则(29)式可化简为 $1-\sigma(1-\gamma\mu_0)\leqslant\gamma\mu_0$,即 $(1-\sigma)(1-\gamma\mu_0)\leqslant 0$. 这与 $\sigma<1$ 和 $\gamma\mu_0<1$ 矛盾. 故必有 $\|H(z^*)\|=h^*=0$,从而有 $H(z^*)=0$.

收敛性分析时需要用到如下假设.

假设1 问题(1)的解集 $S=\{x\in R^n:x\geqslant 0,F(x)\geqslant 0,x^{\mathrm{T}}F(x)=0\}$ 非空有界.

类似于文献[7]中的证明可得

定理3 设 F 是 P_0 函数,$\{z^k=(\mu_k,x^k)\}$ 是由算法1生成的迭代序列. 若假设1成立,则 $\{z^k\}$ 有界,因而至少有一个聚点 $z^*=(\mu^*,x^*)$,且 $H(z^*)=0,x^*\in S$.

定理4 假设定理3的条件成立. 设 $z^*=(\mu^*,x^*)$ 是序列 $\{z^k\}$ 的一个聚点,且 $\forall V\in\partial H(z^*)$ 都是非奇异的,则有

(1)对于所有充分靠近 z^* 的 z^k,恒有 $\lambda\equiv 1$.

(2) $\{z^k\}$ 超线性收敛到 z^*,即 $\|z^{k+1}-z^*\|=o(\|z^k-z^*\|)$,并有 $\mu_{k+1}=o(\mu_k)$.

(3)若 $F'(x)$ 是 Lipschitz 连续的,则收敛速度是二阶的,即 $\|z^{k+1}-z^*\|=O(\|z^k-z^*\|^2)$,并有 $\mu_{k+1}=o((\mu_k)^2)$.

3 算例

取参数 $\rho=0.6,\eta=0.05,\sigma=0.2,\mu_0=0.05$,终止准则取为 $\|H(z^k)\|<10^{-6}$. 程序运行环境是 MATLAB 7.5. PC 机的配置是 CPU 3.06 GHz,内存 2GB.

算例1 (Fathi 问题). 考虑线性互补问题:$F(x)=Mx+q$,其中

$[M]_{ii}=4(i-1)+1,i=1,\cdots,n;$

$[M]_{ij}=[M]_{ii}+1,i=1,\cdots,n-1;j=i+1,\cdots,n;$

$[M]_{ij}=[M]_{jj}+1,j=1,\cdots,n-1,i=j+1,\cdots,n;$

$q=(-1,-1,\cdots,-1)^{\mathrm{T}}.$

这个问题有精确解 $x^*=(1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$. 取初始

点 $x^0=(0,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$ 进行计算，结果如表 1 所示.

表 1 算例 1 数值结果

维数 (n)	迭代次数 (k)	$\Vert H(z^k)\Vert$	$\Vert x^k-x^*\Vert$
8	7	2.3166e−11	1.1324e−10
16	8	7.7571e−12	5.4346e−11
32	7	9.5332e−07	9.2422e−06
64	10	1.4138e−10	2.0231e−09
128	11	1.5243e−07	3.0117e−06
256	11	9.8181e−09	2.7917e−07
512	33	3.6567e−07	1.5418e−05

算例 2 (Kojima-Shindo 问题). 考虑非线性互补问题:测试函数为

$$F(x)=\begin{bmatrix}3x_1^2+2x_1x_2+2x_2^2+x_3+3x_4-6\\ 2x_1^2+x_1+x_2^2+10x_3+2x_4-2\\ 3x_1^2+x_1x_2+2x_2^2+2x_3+9x_4-9\\ x_1^2+3x_2^2+2x_3+3x_4-3\end{bmatrix}.$$

这个问题有一个非退化解 $x^*=(1,0,3,0)^{\mathrm{T}}$ 和一个退化解 $x^{**}=(\sqrt{6}/2,0,0,1/2)^{\mathrm{T}}$. 对于不同的初始点,数值结果如表 2 所示.

表 2 算例 2 数值结果

初始点 (x^0)	迭代次数 (k)	$\Vert H(z^k)\Vert$	$\Vert x^k-x^*\Vert$
(0,0,0,0)	11*	1.5618e−12	5.8873e−13
(1,1,1,1)	7*	4.8049e−11	1.4275e−11
(1,1,0,0)	5*	1.5560e−07	4.6606e−07
(0,0,1,1)	7*	8.7873e−09	1.5091e−09
(10,10,10,10)	11*	6.1989e−08	1.0719e−08
($10^2,10^2,10^2,10^2$)	15*	9.0203e−12	2.6690e−11
($10^3,10^3,10^3,10^3$)	28*	3.0007−07	8.7772e−07

算例 3 (Hanshoop 问题). 测试函数为

$$F(x,y,\mu)=\begin{bmatrix}-\nabla v(x)\\ 0\\ w\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & A^{\mathrm{T}}-\alpha B^{\mathrm{T}} & C^{\mathrm{T}}\\ B-A & 0 & 0\\ -C & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ \mu\end{bmatrix},$$

其中 $v(x)=(x_1+2.5x_2)^p(2.5x_3+x_4)^p(2x_5+3x_6)^p$, $\alpha=0.7$, $p=0.2$, $w=(0.8,0.8)^{\mathrm{T}}$,

$$A=\begin{bmatrix}2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2\\ 3 & 3 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0.5 & 1.5 & 0.5\end{bmatrix},$$

$$B=\begin{bmatrix}1.5 & 1.5 & 1.5 & 1.5 & 1.5 & 1.5 & 4 & 3 & 1.5 & 1.5\\ 2.7 & 2.7 & 1.8 & 1.8 & 0.9 & 0.9 & 0.9 & 0.4 & 2 & 1.5\end{bmatrix}$$

$$C=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 0.5 & 1.5 & 1.5 & 0.5 & 0.5 & 1.5 & 1.5 & 0.5 & 0.5 & 1.5\end{bmatrix}$$

分别取初始点为: $y^0=(0,0)^{\mathrm{T}}$, $u^0=(0,0)^{\mathrm{T}}$, $\mu_0=0.05$, x^0: (1), 0.3e; (2), $(0,0.3,0.3,0,0,0.1,0.3,0,0,0.3)^{\mathrm{T}}$; (3), $(0.3,0,0.3,0,0.3,0,0.3,0,0.3,0)^{\mathrm{T}}$; (4), e; (5), 4e; (6), 6e; (7), 10e. 数值结果见表 3.

表 3 算例 3 数值结果

初始点 (x^0)	迭代次数 (k)	$\Vert H(z^k)\Vert$	CPU 时间
(1)	12	8.9610e−07	0.0300
(2)	9	6.3296e−9	0.0213
(3)	9	1.3617e−10	0.0267
(4)	10	8.8960e−08	0.0287
(5)	8	5.5917e−12	0.0167
(6)	10	2.9499e−08	0.0258
(7)	9	1.8582e−08	0.0211

从上述 3 个数值算例结果(表 1~3)可以看出,本文提出的算法是有效的.

参考文献:

[1] Harker P T, Pang J S. Finite-dimensional variational inequality and nonlinear complementarity problems: a survey oftheory, algorithms and applications[J]. Mathematical Programming, 1990, 48(1): 161-220.

[2] Ferris M C, Pang J S. Engineering and economic applications of complementarity problems[J]. SIAM Review, 1997, 39(3): 669-713.

[3] Fischer A. An NCP-function and its use for the solution of complementarity problems[M]//D Du, L Qi, Womersley R, eds. Recent Advances in Nonsmooth Optimization. New Jersy: World Scientific Publishers, 1995: 88-105.

[4] Sun D, Qi L. On NCP-functions[J]. Computational Optimization and Applications, 1999(13): 201-220,

[5] Chen X, Qi L, Sun D. Global and superlinear convergence of the smoothing Newton method and its application to general box-constrained variational inequalities[J]. Mathematics of Computation, 1998, 67(1): 519-540.

[6] Chen B, Harker P T. Smoothing approximations to nonlinear complementarity problems[J]. SIAM Journal on Optimization, 1997, 7(1): 403-420.

[7] Qi L, Sun D, Zhou G. A new look at smoothing Newton methods for nonlinear complementarity problems and box constrained variational inequality problems[J]. Mathematical Programming, 2000, 87(1): 1-35, 1996, 17, 178-193.

(责任编辑:尹 闯)