2010,26(2):100～102,106
Vol. 26,No. 2 May 2010

一类 Lotka-Volterra 系统可线性化的充要条件

Linearized Necessary and Sufficient Conditions for a Class of Lotka-Volterra System

范兴宇[1],秦桂毅[2]
FAN Xing-yu[1],QIN Gui-yi[2]

(1. 桂林电子科技大学数学与计算科学学院,广西桂林 541004;2. 桂林师范高等专科学校数学与计算机科学系,广西桂林 541001)

(1. School of Mathematics and Computing Science,Guilin University of Electronic Technology, Guilin,Guangxi,541004,China;2. Department of Mathematics and Computer Science, Guilin Normal College, Guilin,Guangxi,541001,China)

摘要:通过计算和推导得到一类 p:-1 共振 Lotka-Volterra 系统的第一对可线性化量的表达式,并在此基础上得出该类系统可线性化的充要条件.

关键词:Lotka-Volterra 系统 线性化 可线性化量

中图法分类号:O193 **文献标识码**:A **文章编号**:1002-7378(2010)02-0100-03

Abstract:The linearization of a class of p:-1 resonance Lotka-Volterra system is studied. A couple of first linearized value for the system are obtained by calculating, deducing and proofing. Then, the necessary and sufficient conditions for linearization of the system are given.

Key words:Lotka-Volterra system,linearization,linearized value

在平面多项式微分系统定性理论中,线性化问题可分为两个方面,一方面是线性部分为中心型微分系统线性化问题,即等时中心问题;另一方面是线性部分为 p:-q 型共振鞍点的微分系统线性化问题.近年来,诸多作者研究了 p:-q 共振型 Lotka-Volterra 系统的可积性和可线性化问题[1~3].得到了共振系统

$$\begin{cases}\dot{x} = x + f(x,y) = x + o(x,y), \\ \dot{y} = -\lambda y + g(x,y) = -\lambda y + o(x,y)\end{cases} \tag{1}$$

可线性化的充分条件及 $\lambda = p \in N\backslash\{1\}$ 的 Lotka-Volterra 系统可线性化的充要条件[4];得出了 $\lambda = p/2$ 的 Lotka-Volterra 系统可线性化的充要条件[5],也解决了 3:-m 型系统的可线性化的问题,可是上述文献均牵涉到计算系统的积分因子,而且其证明过程过于繁琐.本文主要通过计算和归纳得到 $\lambda = 1/p$ 时的 Lotka-Volterra 系统

$$\begin{cases}\dfrac{dz}{dT} = pz + az^2 + bzw, \\ \dfrac{dw}{dT} = -w - czw - dw^2\end{cases} \tag{2}$$

的可线性化量,并给出此系统可线性化的充要条件.

1 预备知识

如果系统(1)在原点存在线性化的变换可将系统线性化,则称该系统在原点是可线性化的.对于 $\lambda = p/q \in Q$ 的系统(1),如果唯一存在形式级数可将此系统转变为 $\dfrac{df}{dT} = f(z,w) + \sum\limits_{i=1}^{\infty} p_i' z^{m_i+1} w^{n_i}$, $\dfrac{dg}{dT} = -\lambda g(z,w) - \sum\limits_{i=1}^{\infty} \lambda q_i' z^{m_i} w^{n_i+1}$,那么我们就称 p_i',q_i' 为系统(1)的可线性化量.

引理 1.1[5] 对于系统

$$\begin{cases}\dfrac{dz}{dT} = z + \sum\limits_{k=2}^{\infty} Z_k(z,w) = Z(z,w), \\ \dfrac{dw}{dT} = -\lambda w - \sum\limits_{k=2}^{\infty} W_k(z,w) = -W(z,w),\end{cases}$$

收稿日期:2009-10-19
作者简介:范兴宇(1984-),男,硕士研究生,主要从事微分方程定性理论研究。

我们能够唯一确定下列形式级数：$f(z,w)=z+\sum_{k+j=2}^{\infty}c'_{kj}z^kw^j$，$g(z,w)=w+\sum_{k+j=2}^{\infty}d'_{kj}z^jw^k$，其中 $c'_{ni+1,mi}=d'_{ni+1,mi}=0$，$i=1,2,\cdots$，使得 $\frac{df}{dT}=f(z,w)+\sum_{i=1}^{\infty}p'_iz^{mi+1}w^{ni}$，$\frac{dg}{dT}=-\lambda g(z,w)-\sum_{i=1}^{\infty}\lambda q'_iz^{mi}w^{ni+1}$. 且当 $k-\lambda j-1\neq0$(i. e. , $|k-mi-1|+|j-ni|\neq0$，$i=0,1,2,\cdots$) 时，c'_{kj} 由下列递推公式确定：$c'_{kj}=\frac{1}{\lambda j+1-k}\sum_{\alpha+\beta=3}^{k+j+1}[(k-\alpha+1)a_{\alpha,\beta-1}-(j-\beta+1)b_{\beta,\alpha-1}]c'_{k-\alpha+1,j-\beta+1}$. 且当 $nj-\lambda(k-1)\neq0$(i. e. , $|k-ni-1|+|j-mi|\neq0$，$i=0,1,2,\cdots$) 时，d'_{kj} 由下列递推公式确定：$d'_{kj}=\frac{1}{j-\lambda(k-1)}\sum_{\alpha+\beta=3}^{k+j+1}[(k-\beta+1)b_{\beta,\alpha-1}-(j-\alpha+1)a_{\alpha,\beta-1}]d'_{k-\beta+1,j-\alpha+1}$. 对于任意正整数 i，p'_i，q'_i 由下列递推公式确定：

$$p'_i=\sum_{\alpha+\beta=3}^{(m+n)i+1}[(mi-\alpha+2)a_{\alpha,\beta-1}-(ni-\beta+1)b_{\beta,\alpha-1}]c'_{mi-\alpha+2,ni-\beta+1},$$

$$q'_i=\frac{1}{\lambda}\sum_{\alpha+\beta=3}^{(m+n)i+1}[(ni-\beta+2)b_{\beta,\alpha-1}-(mi-\alpha+1)a_{\alpha,\beta-1}]d'_{ni-\beta+2,mi-\alpha+1},$$

对于以上表达式，我们令 $c'_{1,0}=d'_{1,0}=1$，$c'_{0,1}=d'_{0,1}=0$，而且若 $\alpha<0$ 或 $\beta<0$，令 $a_{\alpha\beta}=b_{\alpha\beta}=c'_{\alpha\beta}=d'_{\alpha\beta}=0$.

引理 1.2[3] 若对实系统 $z'=z+a_2z^2+a_1zw$，$w'=-\lambda w-b_1zw-b_2w^2$，存在一 $r\in Q^+$，使得映射 $(u,v)=(zw^r,y^r)$ 能够把系统的原点转化为一可线性化的结点，那么原系统原点也是可线性化的，并且若下列条件之一被满足就可判断系统原点是可线性化的：

(A) $\lambda r-1>0$，$\frac{\lambda r}{\lambda r-1}\in N$，且系统在原点领域可积.

(B) $\lambda r-1>0$，$\frac{\lambda r}{\lambda r-1}\in N$，$\frac{b_1}{a_2}=n_1$，$\lambda=n_1+\frac{1}{n_2}$，$n_1,n_2\in N$.

2 系统可线性化的充要条件

对于系统(2) 由引理 1.1，可得

定理 2.1 对系统(2) 的原点，可以由以下递推公式确定其可线性化量：

令 $c'_{1,0}=d'_{1,0}=1$，$c'_{0,1}=d'_{0,1}=0$；当 $k<0$ 或 $j<0$ 或 $j>0$ 且 $k=j/(p+1)$ 时，令 $c'(k,j)=0$；否则

$$c'(k,j)=\frac{1}{j+p-kp}[-(b+cj-bk)c'\cdot[-1+k,j]+(d-dj+ak)c'[k,-1+j]],$$

$$p'(j)=j(b-cp)c'[j,jp]+c'[1+j,jp]+(a+d+aj-djp)c'[1+j,-1+jp].$$

另一方面，当 $k<0$ 或 $j<0$ 或 $j>0$，且 $k=pj+1$ 时，令 $d'(k,j)=0$；否则

$$d'(k,j)=\frac{1}{1-k+jp}(-d+aj-dk)d'\cdot[-1+k,j]+(b-bj+ck)d'[k,-1+j],$$

$$q'(j)=jp(-a+bp)d'[jp,j]+(bp+cp-bjp)d'[1+jp,-1+j]+(cjp^2+1)d'[1+jp,j],$$

且当 $p'_0=q'_0=p'_1=q'_1=\cdots=p'_{i-1}=q'_{i-1}=0$ 时，有 $p(i)=p'(i)$，$q(i)=q'(i)$，$i=1,2,\cdots$

由定理 2.1 的公式可计算出：

定理 2.2 对 p:-1 型 Lotka-Volterra 系统(2) 原点处的第一对可线性化量为

1) 2:-1 型

$$p'_1=\frac{1}{2}b(ab+2bc-ad),q'_1=\frac{1}{2}bc(b+d). \tag{3}$$

2) 3:-1 型

$$p'_1=-\frac{1}{6}b(b-d)(ab+3bc-2ad),$$

$$q'_1=\frac{1}{6}bc(b+d)(-b+d). \tag{4}$$

3) 4:-1 型

$$p'_1=\frac{1}{24}b(b-2d)(b-d)(ab+4bc-3ad),$$

$$q'_1=\frac{1}{24}bc(b+d)(-b+2d)(-b+d). \tag{5}$$

4) 5:-1 型

$$p'_1=\frac{1}{120}b(b-3d)(b-2d)(b-d)(ab+5bc-4ad),$$

$$q'_1=\frac{1}{120}bc(b+d)(-b+3d)(-b+2d)(-b+d). \tag{6}$$

5) 6:-1 型

$$p'_1=\frac{1}{720}b(b-4d)(b-3d)(b-2d)(b-d)(ab+6bc-5ad),$$

$$q'_1=\frac{1}{720}bc(b+d)(-b+4d)(-b+3d)\cdot(-b+2d)(-b+d). \tag{7}$$

一般的，我们有

定理 2.3 对 p:-1 型 Lotka-Volterra 系统(2) 原点处的第一对可线性化量为

$$p_1' = \frac{1}{p!}(-1)^p[ab + pbc - (p-1)ad] \cdot \prod_{k=0}^{p-2}(b-kd), \tag{8}$$

$$q_1' = \frac{1}{p!}bc(b+d)\prod_{k=0}^{p-2}(-b+kd).$$

证明 由定理2.1可知，

$$p_1' = \sum_{\alpha+\beta=3}^{p+2}[(3-\alpha)a_{\alpha,\beta-1} - (p-\beta+1)b_{\beta,\alpha-1}]c'_{3-\alpha,p-\beta+1},$$

又因为Lotka-Volterra系统是二次系统，所以 α,β 为整数且 $\alpha+\beta=3$，所以 $\alpha=1,\beta=2$ 和 $\alpha=2,\beta=1$，故

$$p_1' = [2a-(p-1)d]c'_{2,p-1} + (b-pc)c'_{1,p}, \tag{9}$$

$$c'_{2,p-1} = -p[[2a-(p-2)d]c'_{2,p-2} + [b-(p-1)c]c'_{1,p-1}],$$

$$c'_{1,p} = \frac{1}{\frac{1}{p}\cdot p+1-1}\sum_{\alpha+\beta=3}^{p+2}[(2-\alpha)a_{\alpha,\beta-1} - (p-\beta+1)b_{\beta,\alpha-1}]c'_{2-\alpha,p-\beta+1} = [a-(p-1)d]c'_{1,p-1} - pcc'_{0,p}.$$

因为

$$c'_{0,p} = \frac{1}{\frac{1}{p}\cdot p+1}\sum_{\alpha+\beta=3}^{p+1}[(1-\alpha)a_{\alpha,\beta-1} - (p-\beta+1)b_{\beta,\alpha-1}]c'_{1-\alpha,p-\beta+1} = \frac{1}{2}[(1-p)dc'_{0,p-1} + (-b-pc)c'_{-1,p}],$$

又由定理2.1可知 $c'_{-1,p}$ 为零，所以

$$c'_{0,p} = \frac{1}{2}(1-p)dc'_{0,p-1},\ c'_{0,p} = -\frac{1}{2p}pd(p-1)c'_{0,p-1},\ c'_{0,p-1} = -\frac{1}{2p-1}pd(p-2)c'_{0,p-2},$$

$$c'_{0,p-2} = -\frac{1}{2p-2}pd(p-3)c'_{0,p-3},\cdots,$$

$$c'_{0,2} = -\frac{1}{p+2}pdc'_{0,1},$$

故 $c'_{0,p} = (-1)^{p-1}\frac{(pd)^{p-1}}{2p(2p-1)\cdots(p+2)}c'_{0,1}$. 因为 $c'_{0,1}=0$，所以 $c'_{0,p}=0$. 又因为

$$c'_{1,p-1} = \frac{p}{p-1}[(c-cs)c'_{0,p-1} + (a-d(p-2))c'_{1,p-2}] = -pcc'_{0,p-1} + (\frac{a+d}{p-1}-d)pc'_{1,p-2} = (\frac{a+d}{p-1}-d)pc'_{1,p-2},$$

$$c'_{1,p-1} = (\frac{a+d}{p-1}-d)pc'_{1,p-2}, \tag{10}$$

$$c'_{1,p-2} = (\frac{a+2d}{p-1}-d)pc'_{1,p-3}, \tag{11}$$

$$c'_{1,p-3} = (\frac{a+3d}{p-1}-d)pc'_{1,p-4}, \tag{12}$$

$$\cdots$$

$$c'_{1,1} = (\frac{a+(p-1)d}{p-1}-d)pc'_{1,0}. \tag{13}$$

由(8) + (9) $\cdot(\frac{a+d}{p-1}-d)\cdot p$ + (10) $\cdot(\frac{a+2d}{p-1}-d)\cdot(\frac{a+d}{p-1}-d)\cdot p^2 + \cdots +$ (11) $\cdot(\frac{a+(p-2)d}{p-1}-d)\cdots(\frac{a+d}{p-1}-d)\cdot p^{p-2}$ 可得

$$c'_{1,p-1} = p^{p-1}(\frac{a+(p-1)d}{p-1}-d)(\frac{a+(p-1)d}{p-1}-d)\cdots(\frac{a+d}{p-1}-d)c'_{1,0}.$$

因为 $c'_{1,0}=1$，所以

$$c'_{1,p-1} = p^{p-1}(\frac{a+(p-1)d}{p-1}-d)(\frac{a+(p-1)d}{p-1}-d)\cdots(\frac{a+d}{p-1}-d), \tag{14}$$

所以 $c'_{1,p} = [a-(p-1)d]c'_{1,p-1} = p^{p-1}(a-(p-1)d)\frac{a+(2-p)d}{p-1}\cdot\frac{a+(3-p)d}{p-1}\cdots\frac{a}{p-1}$,

$$c'_{2,p-1} = -p((2a-(p-2)d)c'_{2,p-2} + (b-(p-1)c)c'_{1,p-1}), \tag{15}$$

$$c'_{2,p-2} = -\frac{p}{2}((2a-(p-3)d)c'_{2,p-3} + (b-(p-2)c)c'_{1,p-2}), \tag{16}$$

$$c'_{2,p-3} = -\frac{p}{3}((2a-(p-4)d)c'_{2,p-4} + (b-(p-3)c)c'_{1,p-3}), \tag{17}$$

$$\cdots$$

$$c'_{2,1} = -\frac{p}{p-1}(2ac'_{2,0} + (b-c)c'_{1,1}). \tag{18}$$

由(15) + (16) $\cdot(-p(2a-(p-2)d))$ + (17) $\cdot(-\frac{p}{2}(2a-(p-3)d))(-p(2a-(p-2)d))$ + (18) $\cdot(-p(2a-(p-2)d))\cdots(-\frac{p}{p-2}(2a-d))$ 可得

$$c'_{2,p-1} = (-p)(b-(p-1)c)c'_{1,p-1} + (-p)(-\frac{p}{2})(2a-(p-2)d)(b-(p-2)c)c'_{1,p-2} + (-p)(-\frac{p}{2})(2a-(p-2)d)(2a-(p-3)d)(b-(p-3)c)c'_{1,p-3} + (-p)(-\frac{p}{2})\cdots(-\frac{p}{p-1})(2a-(p-2)d)\cdots(2a-d)c'_{1,1} + (-p)(2a-(p-2)d)\cdots(-\frac{p}{p-1})2ac'_{2,0}, \tag{19}$$

（下转第106页）

$$\frac{12k^2p^2\mu[\cosh(p\xi)+\sinh(p\xi)]}{d+\cosh(p\xi)+\sinh(p\xi)}-$$
$$12\frac{k^2p^2\mu[\cosh(p\xi)+\sinh(p\xi)]^2}{[d+\cosh(p\xi)+\sinh(p\xi)]^2},$$
其中 $\xi=kx+k^3p^2\mu t$,d 是任意常数.

参考文献:

[1] Gardner C S,Greene J M,Kruskal M D,et al. A method for solving KdV equation[J]. Phys Rev Lett, 1967 (19):1095.

[2] Ablowitz M J,Clarkson P A. Soliton,nonlinear evolution equations and inverse scattering[M]. New York:Cambridge University Press,1991.

[3] Zhu Shundong. The generalizing Riccati equation mapping method in non-linear evolution equation: application to (2+1)-dimensional Boiti Leon Pempinelle equation[J]. Chaos,Solitons and Fractals, 2008(37):1335-1342.

[4] Li Zitian,Dai Zhengde. Abundant new exact solutions for the (3+1)-dimensional Jimbo Miwa equation[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2010,361:587-590.

(责任编辑:尹 闯)

(上接第102页)

$$c_{11}'=a,c_{20}'=b. \tag{20}$$

所以,由(9)式,(14)式,(19)式,(20)式可得 $p_1'=\frac{1}{p!}(-1)^p[ab+pbc-(p-1)ad]\prod_{k=0}^{p-2}(b-kd)$.同理可得 $q_1'=\frac{1}{p!}bc(b+d)\prod_{k=0}^{p-2}(-b+kd)$,定理2.3证明完毕.

定理2.4 p:-1型Lotka-Volterra系统(2)原点处可线性化的充要条件是下列条件之一成立:

(1)$b=0$;(2)$b=d$;(3)$b=2d$;…;(p−1)$b=$(p−2)d;(p)$a=0,c=0$.

证明 必要性.通过对 p:-1型Lotka-Volterra系统(2)第一对可线性化量的计算可知,要使系统(2)可线性化必须使其系统所有的可线性化量均为零.若条件(1),(2),…,(p)成立,则系统的第一对可线性化量为零,则所有的可线性化量全为零,故必要性成立.

充分性.若条件(1),(2),(3),(4),…,(p−1),(p)成立,由文献[1]易知,系统(2)是可积的.再由引理1.2可知,系统是可线性化的.

参考文献:

[1] Christopher C,Mardesic P,Rousseau C. Normalizable, interable, and linearizable saddle points for complex quadtatic systems in C2[J]. Journal of Dynamical and Control Systems,2003,9:311-363.

[2] 肖萍.复平面多项式共振微分系统的奇点量与可积性条件[D].长沙:中南大学,2005:6.

[3] Gravel S,Thibault P. Integrability and linearizability of the Lotka-Volterra System with a saddle point with rational hyperbolicity ratio[J]. J Differential Equations, 2002,184:20-47.

[4] Liu C,Chen G,Li C. Integrability and linearizability of the Lotka-Volterra systems [J]. J Differential Equations,2004,198:301-320.

[5] Wang Qinlong,Liu Yirong. Linearizability of the polynomial differential systems with a resonant singular point[J]. Bull Sci math,2008,132:97-111.

(责任编辑:尹 闯)