广西科学院学报 2010,26(2):97～99
Journal of Guangxi Academy of Sciences Vol. 26, No. 2 May 2010

一个具有非线性关系的退化四阶抛物方程弱解的唯一性*

The Uniqueness of Weak Solution for a Fourth Order Degenerate Parabolic Equation with Nonlinear Relation

黎运发[1],郭金勇[2]
LI Yun-fa[1], GUO Jin-yong[2]

(1.柳州师范高等专科学校财经系,广西柳州 545004;2.柳州师范高等专科学校数学与计算机科学系,广西柳州 545004)

(1. Department of Finance and Economics, Liuzhou Teachers College, Liuzhou, Guangxi, 545004, China; 2. Department of Mathematics and Computer Science, Liuzhou Teachers College, Liuzhou, Guangxi, 545004, China)

摘要:讨论一个具有非线性关系的退化四阶抛物方程的初边值问题,在一些初值的假定下,证明该问题弱解的唯一性.

关键词:四阶抛物方程 弱解 唯一性

中图法分类号:O175.26 **文献标识码**:A **文章编号**:1002-7378(2010)02-0097-03

Abstract: An initial-boundary value problem for a fourth order degenerate parabolic equation with nonlinear relation was considered. Under some assumptions on the initial value, the uniqueness of weak solutions is proved.

Key words: fourth order parabolic equation, weak solution, uniqueness

本文考虑如下具有非线性关系的退化四阶抛物方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\Delta(|\Delta u|^{p-2}\Delta u)-\Delta u+\lambda|u|^{p-2}u=0, x\in\Omega, t>0, p>2, \quad (0.1)$$

其中 $\Omega\subset\mathbb{R}^N$ 为有界区域,$\Delta_p^2 u=\Delta(\Delta u|^{p-2}\Delta u)$ 称为 p- 双调和算子,$p=2$ 时为通常的双调和算子.

根据物理学的研究,通常对方程(0.1)补充以自然边界条件

$$u=\Delta u=0, x\in\partial\Omega, t>0, \quad (0.2)$$

以及初始条件

$$u(x,0)=u_0(x), x\in\Omega. \quad (0.3)$$

方程(0.1)为典型的高阶方程,具有丰富的理论内涵.近年来,有许多关于 p- 双调和方程研究的文献,如 Pavel Drábek 和 Mitsuharu Ôtani[1] 研究了方程

$$\Delta(|\Delta u|^{p-2}\Delta u)=\lambda|u|^{p-2}u, p>1, \quad (0.4)$$

并证明了(0.4)式,(0.2)式有一个单的、孤立的正主特征值 λ_1.

方程(0.4)为椭圆方程,但是,关于具有 p- 双调和算子的抛物方程的研究,目前在国内外文献中所见甚少.本文所讨论的方程有些类似于 p-Laplace 方程,但是用于研究 p-Laplace 方程的许多方法,如基于极大值原理的方法,对此方程不再有效.由于退化,问题(0.1)～(0.3)不再有通常意义下的古典解.文献[2]证明了问题(0.1)～(0.3)弱解的存在性,本文在一些初值的假定下,证明问题(0.1)～(0.3)弱解的唯一性.

1 定义及引理

定义 1 一个函数被称为问题(0.1)～(0.3)的弱解,如果满足下列条件:

(1)$u\in L^\infty(0,T;W_0^{2,p}(\Omega))\cap C(0,T;L^2(\Omega))$, $\frac{\partial u}{\partial t}\in L^\infty(0,T;W_0^{-2,p'}(\Omega))$,其中 p' 是 p 的共轭

收稿日期:2009-06-26
作者简介:黎运发(1966-),男,讲师,主要从事偏微分方程研究。
*广西新世纪教改工程"十一五"第五批立项项目(一般资助项目)(编号:2009B098)资助。

指数.

(2) 对任意的$\varphi\in C_0^\infty(Q_T)$,$Q_T=\Omega\times(0,T)$,以下积分等式成立

$$-\iint_{Q_T}u\frac{\partial\varphi}{\partial t}\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\iint_{Q_T}|\Delta u|^{p-2}\Delta u\Delta\varphi\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t-\iint_{Q_T}u\Delta\varphi\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\lambda\iint_{Q_T}|u|^{p-2}u\varphi\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t=0.$$

(3)$u(x,0)=u_0(x)$. u_0为初始值函数,下同.

证明问题(0.1)~(0.3)弱解的唯一性,需要以下引理.

引理1 对$\varphi\in L^\infty(t_1,t_2;W_0^{2,p}(\Omega))$及$\varphi_t\in L^\infty(\Omega\times(t_1,t_2))$,$0\leqslant t_1<t_2\leqslant T$. 问题(0.1)~(0.3)中弱解满足

$$\int_\Omega u(x,t_1)\varphi(x,t_1)\mathrm{d}x+\int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega(u\frac{\partial\varphi}{\partial t}+|\Delta u|^{p-2}\Delta u\Delta\varphi-u\Delta\varphi)\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\lambda\int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega|u|^{p-2}u\varphi\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t=\int_\Omega u(x,t_2)\varphi(x,t_2)\mathrm{d}x.$$

特别地,对$\varphi\in W_0^{2,p}(\Omega)$有

$$\int_\Omega(u(x,t_1)-u(x,t_2))\varphi\,\mathrm{d}x+\int_{t_2}^{t_2}\int_\Omega(|\Delta u|^{p-2}\Delta u\Delta\varphi-u\Delta\varphi+\lambda|u|^{p-2}u\varphi)\mathrm{d}x\mathrm{d}t=0.\tag{1.1}$$

证明 由$\varphi\in L^\infty(t_1,t_2;W_0^{2,p}(\Omega))$及$\varphi_t\in L^\infty(\Omega\times(t_1,t_2))$,得出存在函数序列$\{\varphi_k\}$,当$k\to\infty$时$\|\varphi_{kt}-\varphi_t\|_{L^\infty(\Omega\times(t_1,t_2))}\to 0$,$\|\varphi_k-\varphi\|_{L^\infty(t_1,t_2;W_0^{2,p}(\Omega))}\to 0$.

选取函数$j(s)\in C_0^\infty(R)$,使得

$$j(s)\geqslant 0,s\in R;j(s)=0,\forall\ |s|>1;\int_R j(s)\mathrm{d}s=1.$$

对$h>0$,定义$j_h(s)=\frac{1}{h}j(\frac{s}{h})$且

$$\eta_h(t)=\int_{t-t_2+2h}^{t-t_1-2h}j_h(s)\mathrm{d}s.$$

显然对所有的$t\in(t_1,t_2)$,$\eta_h\in C_0^\infty(t_1,t_2)$,$\lim\limits_{h\to 0^+}\eta_h=1$. 在弱解定义中选择,$\varphi=\varphi_k(x,t)\eta_h(t)$,则有

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega u\varphi_k j_h(t-t_1-2h)\mathrm{d}x\mathrm{d}t-\int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega u\varphi_k j_h(t-t_2+2h)\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega u\varphi_{kt}\eta_h\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega|\Delta u|^{p-2}\Delta u\Delta\varphi_k\eta_h\mathrm{d}x\mathrm{d}t-\int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega u\Delta\varphi_k\eta_h\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\lambda\int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega|u|^{p-2}u\varphi_k\eta_h\mathrm{d}x\mathrm{d}t=0.$$

注意到

$$|\int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega u\varphi_k j_h(t-t_1-2h)\mathrm{d}x\mathrm{d}t-\int_\Omega(u\varphi_k)|_{t=t_1}\mathrm{d}x|=|\int_{t_1+h}^{t_1+3h}\int_\Omega u\varphi_k j_h(t-t_1-2h)\mathrm{d}x\mathrm{d}t-\int_{t_1+h}^{t_1+3h}\int_\Omega(u\varphi_k)|_{t=t_1}j_h(t-t_1-2h)\mathrm{d}x\mathrm{d}t|\leqslant\sup_{t_1+h<t<t_1+3h}\int_\Omega|(u\varphi_k)|_t-(u\varphi_k)|_{t_1}|\mathrm{d}x.\tag{1.2}$$

且$u\in C(0,T;L^\infty(\Omega))$,(1.2)式右端$\to 0$(当$h\to 0$时). 类似地

$$|\int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega u\varphi_k j_h(t-t_2+2h)\mathrm{d}x\mathrm{d}t-\int_\Omega(u\varphi_k)|_{t=t_2}\mathrm{d}x|\to 0,\text{当}h\to 0\text{时}.$$

令$h\to 0$,$k\to+\infty$,得

$$\int_\Omega u(x,t_1)\varphi(x,t_1)\mathrm{d}x+\int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega(u\frac{\partial\varphi}{\partial t}+|\Delta u|^{p-2}\Delta u\Delta\varphi-u\Delta\varphi)\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega\lambda|u|^{p-2}u\varphi\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t=\int_\Omega u(x,t_2)\varphi(x,t_2)\mathrm{d}x.$$

特别地,对$\varphi\in W_0^{2,p}(\Omega)$,有

$$\int_\Omega u(x,t_1)-u(x,t_2))\varphi\,\mathrm{d}x+\int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega(|\Delta u|^{p-2}\Delta u\Delta\varphi-u\Delta\varphi+\lambda|u|^{p-2}u\varphi)\mathrm{d}x\mathrm{d}t=0.$$

引理1证明完毕.

2 弱解的唯一性

固定$\tau\in(0,T)$,令h满足$0<\tau<\tau+h<T$. 设$t_1=\tau$,$t_2=\tau+h$,用$\frac{1}{h}$乘以(1.1)式,对$\varphi\in W_0^{2,p}(\Omega)$得到

$$\int_\Omega(u_h(x,\tau))_\tau\varphi\,\mathrm{d}x+\int_\Omega(|\Delta u|^{p-2}\Delta u)_h\cdot(x,\tau)\Delta\varphi\,\mathrm{d}x-\int_\Omega u_h(x,\tau)\Delta\varphi\,\mathrm{d}x+\int_\Omega\lambda(|u|^{p-2}u)_h(x,\tau)\varphi\,\mathrm{d}x=0,$$

其中

$$u_h(x,t)=\begin{cases}\frac{1}{h}\int_t^{t+h}u(.,\tau)\mathrm{d}\tau,t\in(0,T-h);\\0,t>T-h.\end{cases}$$

定理1 问题(0.1)~(0.3)仅有一个弱解.

证明 假定u_1,u_2为问题(0.1)~(0.3)的两个弱解. 则

$$\int_\Omega(u_1(x,\tau)-u_2(x,\tau))_{h\tau}\varphi\,\mathrm{d}x+\int_\Omega(|\Delta u_1|^{p-2}\Delta u_1-|\Delta u_2|^{p-2}\Delta u_2)_h(x,\tau)\Delta\varphi\,\mathrm{d}x-$$

$$\int_\Omega (u_1-u_2)_h(x,\tau)\Delta\varphi\,\mathrm{d}x+\lambda\int_\Omega (|u_1|^{p-2}u_1-|u_2|^{p-2}u_2)_h(x,\tau)\varphi\,\mathrm{d}x=0.$$

对固定的 τ，取 $\varphi(x)=(u_1-u_2)_h\in W_0^{2,p}(\Omega)$，从而

$$\int_\Omega (u_1(x,\tau)-u_2(x,\tau))_{h\tau}(u_1-u_2)_h\mathrm{d}x=-\int_\Omega (|\Delta u_1|^{p-2}\Delta u_1-|\Delta u_2|^{p-2}\Delta u_2)_h(x,\tau)\Delta(u_1-u_2)_h\mathrm{d}x+\int_\Omega (u_1-u_2)_h(x,\tau)\Delta(u_1-u_2)_h\mathrm{d}x-\lambda\int_\Omega (|u_1|^{p-2}u_1-|u_2|^{p-2}u_2)_h(x,\tau)(u_1-u_2)_h\mathrm{d}x.$$

在区间 $(0,t)$ 中，上式关于 τ 积分，得

$$\int_\Omega |(u_1-u_2)_h|^2(x,t)\mathrm{d}x\leqslant 0.$$

从而

$$\int_\Omega |(u_1-u_2)_h|^2\mathrm{d}x=0.$$

因此，$u_1=u_2$. 定理 1 证明完毕.

参考文献：

[1] Pavel Drábek, Mitsuharu tani. Global bifurcation result for the p-biharmonic operator [J]. Electronic Journal of Differential Equations, 2001, 48: 1-19.

[2] 郭金勇.一个具有非线性关系的退化四阶抛物方程弱解的存在性[J].河池学院学报，2008(2)：15-19.

（责任编辑：韦廷宗）

（上接第 94 页）

$+1$) 道路上第 1 条边的序列，$E'_{2r+1}=(e_1^{2r+1},e_3^{2r+1},\cdots,e_{2m+1}^{2r+1})^{\mathrm{T}}=(v_1^{2r}v,v_3^{2r}v,\cdots,v_{2m+1}^{2r}v)^{\mathrm{T}}$ 为 $P_{2r+1,2m+1}$ 第 i 条（i 为奇数且 $1\leqslant i\leqslant 2m+1$）道路上第 $2r+1$ 条边的序列，记 $E''_{2r+1}=(e_2^{2r+1},e_4^{2r+1},\cdots,e_{2m}^{2r+1})^{\mathrm{T}}=(v_2^{2r}v,v_4^{2r}v,\cdots,v_{2m}^{2r}v)^{\mathrm{T}}$ 为 $P_{2r+1,2m+1}$ 第 i 条（i 为偶数且 $2\leqslant i\leqslant 2m$）道路上第 $2r+1$ 条边的序列，则 $g(E_1)$

$$=\begin{bmatrix}(2r+1)(2m+1)\\(2r+1)(2m+1)-1\\\vdots\\2r(2m+1)+1\end{bmatrix},g(E'_{2r+1})=\begin{bmatrix}m+1\\m+2\\\vdots\\2m+1\end{bmatrix},g(E''_{2r+1})=\begin{bmatrix}1\\2\\\vdots\\m\end{bmatrix}.$$

显然，$g(E_0)$，$g(E'_j)$，$g(E''_j)$ 中（$2\leqslant j\leqslant 2r$）的序列由上至下单调递减，$g(E'_{2r+1})$、$g(E''_{2r+1})$ 中的序列由上至下单调递增，且

$$g(E_1)>g(E'_2)>g(E''_2)>g(E'_3)>g(E''_3)>\cdots>g(E'_{2r-1})>g(E''_{2r-1})>g(E'_{2r+1})>g(E''_{2r+1}).$$

故 $P_{2r+1,2m+1}$ 的所有边的标号也互不相同.由优美标号的定义知，f 是 $P_{2r+1,2m+1}$ 的一个优美标号.

参考文献：

[1] Ringel G. Problem 25 in theory of graphs and its application[J]. Proc Symposium Smolenice, 1963: 162.

[2] Rosa A. On certain valuations of the vertices of a graph [J]. Theory of Graphs, Proc Internat, Sympos, Rome. 1967: 349-355.

[3] Sheppard D A. The factorial representation of major balanced labelled graphs[J]. Discrete Math, 1976, 15: 379-388.

[4] Kathiesan K M. Two classes of graceful graphs[J]. Ars Combinatoria, 2000(22): 491-504.

[5] 杨元生，容青，徐喜荣.一类优美图[J].数学研究与评论，2004，3(24)：520-524.

（责任编辑：尹 闯）