

$P_{2r+1, 2m+1}$ 图的一个优美标号*

A Graceful Labeling of Graph $P_{2r+1, 2m+1}$

容 青, 熊冬春, 董 芳

RONG Qing, XIONG Dong-chun, DONG Fang

(广西师范学院计算机与信息工程学院, 广西南宁 530023)

(College of Computer and Information Engineering, Guangxi Teachers Education University, Nanning, Guangxi, 530023, China)

摘要: 利用函数构造的方法得到所有 $P_{2r+1, 2m+1}$ 图的一个优美标号.

关键词: 优美图 顶点标号 边标号

中图分类号: O157.5 文献标识码: A 文章编号: 1002-7378(2010)02-0093-02

Abstract: A graceful labeling regular for all the $P_{2r+1, 2m+1}$ is given in this paper by function constructing.

Key words: graceful graph, vertex labeling, edge labeling

早在 20 世纪 60 年代 Ringel G^[1]和 Rosa A^[2]开始研究优美图. 如今优美图的研究成果被应用于射电天文学、X-射线衍射晶体学、密码设计、通信网络编址、导弹控制码设计、同步机码设计等领域. 优美图的优美标号个数与图的边数有关, 文献[3]证明 q 条边的优美图有 $q!$ 个优美标号. 对于一类优美图, 在其众多优美标号中寻找出一个统一的规律是一件困难的事. 目前一般是采用回溯与分支限界方法尽可能多地搜索出多种情况下的多个优美标号, 然后对多个优美标号进行分析, 抽取出共同规律, 构造出统一的优美标号函数. KM. Kathiresan^[4]证实 $P_{2r, 2m-1}$ (r, m 皆为任意正整数) 是优美的, 且猜想: 除了 $(a, b) = (2r - 1, 4m - 2)$ 外, 所有的 $P_{a, b}$ 都是优美的. 杨元生^[5]证实 $P_{2r+1, 2m+1}$ 是优美的, 并给出了一个适合于所有 $P_{2r+1, 2m+1}$ 图的优美标号规律. 本文给出适合于所有 $P_{2r+1, 2m+1}$ 图的另一个优美标号.

1 基本定义

对于一个给定的简单图 $G = (V, E)$, 如果对每一个 $v \in V$, 存在一个非负整数 $f(v)$ (称为顶点 v 的标号), 满足下述 3 个条件:

- (1) 对任意的 $v_1, v_2 \in V$, 如果 $v_1 \neq v_2$, 则 $f(v_1) \neq f(v_2)$;
 - (2) $\text{Max}\{f(v) | v \in V\} = |E|$;
 - (3) 对任意的 $e_1, e_2 \in E$, 如果 $e_1 \neq e_2$, 则 $g(e_1) \neq g(e_2)$, 其中 $g(e) = |f(u) - f(v)|, e = uv$.
- 则 f 称为 G 的一个优美标号, G 称为优美图.

设 u, v 是两个固定顶点, 用 b 条内部互不相交且长度皆为 a 的道路连接 u, v 所得的图用 $P_{a, b}$ 表示.

2 主要结果

设 $v_i^0, v_i^1, v_i^2, \dots, v_i^{2r+1}$ 是 $P_{2r+1, 2m+1}$ 第 i 条长度为 $2r + 1$ 的道路上的顶点 (图 1 为 $P_{5, 5}$ 的顶点). 对所有的 $i, v_i^0 = u, v_i^{2r+1} = v$.

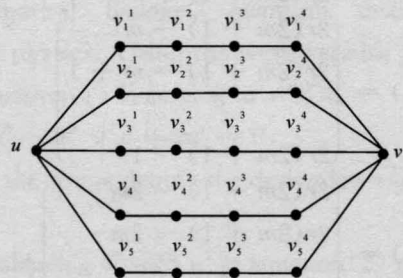


图 1 $P_{5,5}$ 的顶点

定理 顶点标号

$$f(u) = (2r + 1)(2m + 1);$$

$$f(v) = ((2r + 1)(2m + 1) - 1)/2;$$

$$f(v_i^j) =$$

收稿日期: 2009-08-17

作者简介: 容 青(1973-), 女, 讲师, 硕士, 主要从事图论算法研究.

* 广西教育厅科研项目(200807LX431)和广西师范学院青年科研基金项目(0709B006)资助.

$$\left\{ \begin{array}{l} (i-1) + (j-1)(2m+1)/2, j \text{ 为奇数且 } 0 < j < \\ 2r+1, 1 \leq i \leq 2m+1; \\ (2r+1)(2m+1) - j(2m+1)/2 + (i-1)/2, \\ j \text{ 为偶数, } i \text{ 为奇数且 } 0 < j < 2r+1, 1 \leq \\ i \leq 2m+1; \\ (2r+1)(2m+1) - j(2m+1)/2 + i/2 - \\ m-1, j \text{ 为偶数, } i \text{ 为偶数且 } 0 < j < \\ 2r+1, 2 \leq i \leq 2m \end{array} \right.$$

是 $P_{2r+1, 2m+1}$ 图的一个优美标号.

证明 $P_{2r+1, 2m+1}$ 图有 $2r(2m+1) + 2$ 个顶点和 $(2r+1)(2m+1)$ 条边. 事实上, 记 $V_j = (v_1^j, v_2^j, \dots, v_{2m+1}^j)^T$ 为 $P_{2r+1, 2m+1}$ 第 j 列 (j 为奇数且 $1 \leq j \leq 2m-1$) 顶点序列, 则 $f(V_1) = (0, 1, \dots, 2m)^T$, $f(V_3) = (2m+1, 2m+2, \dots, 4m+1)^T, \dots,$

$$f(V_{2r-3}) = \begin{pmatrix} r(2m+1) - 4m - 2 \\ r(2m+1) - 4m - 1 \\ \vdots \\ r(2m+1) - 2m - 2 \end{pmatrix}, f(V_{2r-1}) = \begin{pmatrix} r(2m+1) - 2m - 1 \\ r(2m+1) - 2m \\ \vdots \\ r(2m+1) - 1 \end{pmatrix}.$$

显然, 每个 $f(V_j)$ 中的序列从上至下单调递增, 且有 $f(V_j) < f(V_3) < \dots < f(V_{2r-1}) < f(v)$.

记 $V_j = (v_1^j, v_3^j, \dots, v_{2m+1}^j)^T$ 为 $P_{2r+1, 2m+1}$ 第 j 列 (j 为偶数且 $2 \leq j \leq 2m$) 奇数行顶点序列, $V_j = (v_2^j, v_4^j, \dots, v_{2m}^j)^T$ 为 $P_{2r+1, 2m+1}$ 第 j 列 (j 为偶数且 $2 \leq j \leq 2m$) 偶数行顶点序列. 则

$$\begin{aligned} f(V_2) &= \begin{pmatrix} 2r(2m+1) \\ 2r(2m+1) + 1 \\ \vdots \\ 2r(2m+1) + m \end{pmatrix}, \\ f(V_2^*) &= \begin{pmatrix} 2r(2m+1) - m \\ 2r(2m+1) - m + 1 \\ \vdots \\ 2r(2m+1) - 1 \end{pmatrix}, \\ f(V_4) &= \begin{pmatrix} 2r(2m+1) - 2m - 1 \\ 2r(2m+1) - 2m \\ \vdots \\ 2r(2m+1) - m - 1 \end{pmatrix}, \\ f(V_4^*) &= \begin{pmatrix} 2r(2m+1) - 3m - 1 \\ 2r(2m+1) - 3m \\ \vdots \\ 2r(2m+1) - 2m - 2 \end{pmatrix}, \dots, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(V_{2r}^*) &= \begin{pmatrix} r(2m+1) + 2m + 1 \\ r(2m+1) + 2m + 2 \\ \vdots \\ r(2m+1) + 3m + 1 \end{pmatrix}, \\ f(V_{2r}^*) &= \begin{pmatrix} r(2m+1) + m + 1 \\ r(2m+1) + m + 2 \\ \vdots \\ r(2m+1) + 2m - 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

显然, 每个 $f(V_j), f(V_j^*)$ 中的序列从上至下也是单调递增, 且有 $f(u) > f(V_2^*) > f(V_2) > f(V_4^*) > f(V_4) > \dots > f(V_{2r}^*) > f(V_{2r}^*) > f(v)$. 故 $P_{2r+1, 2m+1}$ 的 $2r(2m+1) + 2$ 个顶点标号互不相同, 且 $\max\{f(v_i^j) | v_i^j \in V(G)\} = (2r+1)(2m+1) = |E|$.

记 $E_j = (e_1^j, e_3^j, \dots, e_{2m+1}^j)^T = (v_1^j v_1^{j-1}, v_3^j v_3^{j-1}, \dots, v_{2m+1}^j v_{2m+1}^{j-1})^T$ 为 $P_{2r+1, 2m+1}$ 第 i 条 (i 为奇数且 $1 \leq i \leq 2m+1$) 道路上第 j 条 ($2 \leq j \leq 2r$) 边的序列, $E_j = (e_2^j, e_4^j, \dots, e_{2m}^j)^T = (v_2^j v_2^{j-1}, v_4^j v_4^{j-1}, \dots, v_{2m}^j v_{2m}^{j-1})^T$ 为 $P_{2r+1, 2m+1}$ 第 i 条 (i 为偶数且 $2 \leq i \leq 2m$) 道路上第 j 条 ($2 \leq j \leq 2r$) 边的序列, 令第 i ($1 \leq i \leq 2m+1$) 条道路第 j 条 ($1 \leq j \leq 2r+1$) 边的标号为 $g(e_i^j) = |f(v_i^j) - f(v_i^{j-1})|$, 则

$$\begin{aligned} g(E_2^*) &= \begin{pmatrix} 2r(2m+1) \\ 2r(2m+1) - 1 \\ \vdots \\ 2r(2m+1) - m \end{pmatrix}, \\ g(E_2^*) &= \begin{pmatrix} 2r(2m+1) - m - 1 \\ 2r(2m+1) - m - 2 \\ \vdots \\ 2r(2m+1) - 2m \end{pmatrix}, \\ g(E_3^*) &= \begin{pmatrix} 2r(2m+1) - 2m - 1 \\ 2r(2m+1) - 2m - 2 \\ \vdots \\ 2r(2m+1) - 3m - 1 \end{pmatrix}, \\ g(E_3^*) &= \begin{pmatrix} 2r(2m+1) - 3m - 2 \\ 2r(2m+1) - m - 3 \\ \vdots \\ 2r(2m+1) - 4m - 1 \end{pmatrix}, \dots, \\ g(E_{2r-1}^*) &= \begin{pmatrix} 4m+2 \\ 4m+1 \\ \vdots \\ 3m+2 \end{pmatrix}, g(E_{2r-1}^*) = \begin{pmatrix} 3m+1 \\ 3m \\ \vdots \\ 2m+2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

记 $E_1 = (e_1^0, e_2^0, \dots, e_{2m+1}^0)^T = (uv_1^1, uv_2^1, \dots, uv_{2m+1}^1)^T$ 为 $P_{2r+1, 2m+1}$ 第 i 条 (i 为奇数且 $1 \leq i \leq 2m$)

(下转第 99 页)

$$\int_{\Omega} (u_1 - u_2)_h(x, \tau) \Delta \varphi dx + \lambda \int_{\Omega} (|u_1|^{\rho-2} u_1 - |u_2|^{\rho-2} u_2)_h(x, \tau) \varphi dx = 0.$$

对固定的 τ , 取 $\varphi(x) = (u_1 - u_2)_h \in W_0^{2,p}(\Omega)$, 从而

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (u_1(x, \tau) - u_2(x, \tau))_{ht} (u_1 - u_2)_h dx = \\ & - \int_{\Omega} (|\Delta u_1|^{\rho-2} \Delta u_1 - |\Delta u_2|^{\rho-2} \Delta u_2)_h(x, \tau) \Delta (u_1 - u_2)_h dx + \\ & \int_{\Omega} (u_1 - u_2)_h(x, \tau) \Delta (u_1 - u_2)_h dx - \\ & \lambda \int_{\Omega} (|u_1|^{\rho-2} u_1 - |u_2|^{\rho-2} u_2)_h(x, \tau) (u_1 - u_2)_h dx. \end{aligned}$$

在区间 $(0, t)$ 中, 上式关于 τ 积分, 得

$$\int_{\Omega} |(u_1 - u_2)_h|^2(x, t) dx \leq 0.$$

从而

$$\int_{\Omega} |(u_1 - u_2)_h|^2 dx = 0.$$

因此, $u_1 = u_2$. 定理 1 证明完毕.

参考文献:

- [1] Pavel Drábek, Mitsuharu tani. Global bifurcation result for the p -biharmonic operator [J]. Electronic Journal of Differential Equations, 2001, 48: 1-19.
- [2] 郭金勇. 一个具有非线性关系的退化四阶抛物方程弱解的存在性[J]. 河池学院学报, 2008(2): 15-19.

(责任编辑: 韦廷宗)

(上接第 94 页)

+ 1) 道路上第 1 条边的序列, $E'_{2r+1} = (e_1^{2r+1}, e_3^{2r+1}, \dots, e_{2m+1}^{2r+1})^T = (v_1^{2r} v, v_3^{2r} v, \dots, v_{2m+1}^{2r} v)^T$ 为 $P_{2r+1, 2m+1}$ 第 i 条 (i 为奇数且 $1 \leq i \leq 2m+1$) 道路上第 $2r+1$ 条边的序列, 记 $E''_{2r+1} = (e_2^{2r+1}, e_4^{2r+1}, \dots, e_{2m}^{2r+1})^T = (v_2^{2r} v, v_4^{2r} v, \dots, v_{2m}^{2r} v)^T$ 为 $P_{2r+1, 2m+1}$ 第 i 条 (i 为偶数且 $2 \leq i \leq 2m$) 道路上第 $2r+1$ 条边的序列, 则 $g(E_1)$

$$= \begin{pmatrix} (2r+1)(2m+1) \\ (2r+1)(2m+1) - 1 \\ \vdots \\ 2r(2m+1) + 1 \end{pmatrix}, g(E'_{2r+1}) = \begin{pmatrix} m+1 \\ m+2 \\ \vdots \\ 2m+1 \end{pmatrix}, g(E''_{2r+1}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ m \end{pmatrix}. \text{显然, } g(E_0), g(E'_j),$$

$g(E''_j)$ 中 ($2 \leq j \leq 2r$) 的序列由上至下单调递减, $g(E'_{2r+1}), g(E''_{2r+1})$ 中的序列由上至下单调递增, 且

$$g(E_1) > g(E'_2) > g(E''_2) > g(E'_3) > g(E''_3) > \dots > g(E'_{2r-1}) > g(E''_{2r-1}) > g(E'_{2r+1}) > g(E''_{2r+1}).$$

故 $P_{2r+1, 2m+1}$ 的所有边的标号也互不相同. 由优美标号的定义知, f 是 $P_{2r+1, 2m+1}$ 的一个优美标号.

参考文献:

- [1] Ringel G. Problem 25 in theory of graphs and its application[J]. Proc Symposium Smolenice, 1963: 162.
- [2] Rosa A. On certain valuations of the vertices of a graph [J]. Theory of Graphs, Proc Internat, Sympos, Rome, 1967: 349-355.
- [3] Sheppard D A. The factorial representation of major balanced labelled graphs[J]. Discrete Math, 1976, 15: 379-388.
- [4] Kathiesan K M. Two classes of graceful graphs[J]. Ars Combinatoria, 2000(22): 491-504.
- [5] 杨元生, 容青, 徐喜荣. 一类优美图[J]. 数学研究与评论, 2004, 3(24): 520-524.

(责任编辑: 尹 闯)