广西科学院学报
Journal of Guangxi Academy of Sciences
2010,26(2):89～92
Vol. 26,No. 2 May 2010

广义微分中值定理“中间点”ξ的单调性连续性和可导性*

The Monotony, Continuity and Derivative for the Mid-point ξ of the Mean-value Theorem of Differential

张 毅,白 波,梁 坚
ZHANG Yi, BAI Bo, LIANG Jian

(柳州城市职业学院,广西柳州 545001)
(Liuzhou City Vocational College, Liuzhou, Guangxi, 545001, China)

摘要:函数 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内左、右可导的弱条件下,得到3个关于广义中值定理“中间点”ξ 的单调性、连续性及可导性的定理.

关键词:微分中值定理 广义微分中值定理 中间点
中图法分类号:O174 **文献标识码**:A **文章编号**:1002-7378(2010)02-0089-04

Abstract: In the open interval (a,b) within the left and right derivative for $f(x)$, three theorems of monotony、continuity and derivative for the mid-point of the mean-value theorem of differential were obtained.

Key words: mean value theorem of differentials, generalized mean value theorem of differentials, mid-point

微分中值定理的研究主要有两个方面:一方面是在一般的微分中值定理的强条件下,研究“中间点”ξ 的单调性、连续性、可导性、渐近性;另一方面是将微分中值定理的强条件减弱,探讨一些广义微分中值定理. 2007 年,刘龙章等[1]对微分中值定理“中间点”ξ 的单调性、连续性及可导性进行了讨论,得到了一些较好的结果. 本文在文献[1]的基础上,把开区间 (a,b) 内可导改为开区间 (a,b) 内左、右可导,对广义 Lagrange 中值定理及广义 Cauchy 中值定理“中间点”ξ 的单调性、连续性及可导性进行研究,得到几个更弱条件下的定理.

1 引理

引理 1[2](广义 Lagrange 中值定理)若函数 $f(x)$ 满足条件:(i)$f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续;(ii)$f(x)$ 在开区间 (a,b) 内左、右可导,则存在 $\xi \in (a,b)$ 及非负常数 p,q,其中 $p+q=1$,使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = pf_+(\xi) + qf_-(\xi). \quad (1)$$

引理 2[2](广义 Cauchy 中值定理)若函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 满足条件:(i)$f(x)$ 和 $g(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续;(ii)$f(x)$ 和 $g(x)$ 在开区间 (a,b) 内左、右可导;(iii)对于任意的非负常数 m,k,其中 $m+k=1$,有 $mf_+(x)+kf_-(x)$ 和 $mg'_+(x)+kg'_-(x)$ 不同时为零;(iv)$g(a)\neq g(b)$,则在 (a,b) 内至少存在一点 ξ 及非负常数 p,q,其中 $p+q=1$,使得

$$\frac{pf_+(\xi)+qf_-(\xi)}{pg'_+(\xi)+qg'_-(\xi)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}. \quad (2)$$

2 “中间点”ξ 的单调性

定理 1 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续,在开区间 (a,b) 内左、右可导,且 $f_+(x)$,$f_-(x)$ 在 (a,b) 内严格单调且具有相同的单调性,则(i)满足(1)式的点 ξ 是 x 的单值函数(简称函数),记 $\xi=\xi(x)$;(ii)满足(1)式的点 $\xi=\xi(x)$ 是 x 的单调增加的函数.

证明 (i)由(1)式,当 b 取 x 时,我们有

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = pf_+(\xi(x)) + qf_-(\xi(x)). \quad (3)$$

当 $\exists\, \xi_1(x)\neq\xi_2(x)$(不妨设 $\xi_1(x)<\xi_2(x)$)时

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = pf_+(\xi_1(x)) + qf_-(\xi_1(x)),$$

收稿日期:2010-02-13
作者简介:张 毅(1959-),男,副教授,主要从事函数论研究。
* 广西教育厅科研项目(桂科自 0728041)资助。

(4)

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=pf_{+}(\xi_2(x))+qf_{-}(\xi_2(x)).$$

(5)

由(4)式和(5)式,有

$$p(f_{+}(\xi_1(x))-f_{+}(\xi_2(x)))+q(f_{-}(\xi_1(x))-f_{-}(\xi_2(x)))=0. \quad (6)$$

这与 $f_{+}(x)$,$f_{-}(x)$ 具有相同的单调性的条件矛盾,所以 $\xi_1(x)=\xi_2(x)$.因此,ξ 是 x 的单值函数.

(ii) 不妨设 $f_{+}(x)$,$f_{-}(x)$ 在 (a,b) 内单调增加(若 $f_{+}(x)$,$f_{-}(x)$ 为单调减少类似可证),任取不同的两点 $x_1,x_2\in(a,b)$,不妨设 $x_1<x_2$,有

$$f(x_2)-f(a)=[pf_{+}(\xi(x_2))+qf_{-}(\xi(x_2))](x_2-a), \quad (7)$$

$$f(x_1)-f(a)=[pf_{+}(\xi(x_1))+qf_{-}(\xi(x_1))](x_1-a), \quad (8)$$

因此有

$$f(x_2)-f(x_1)=[p(f_{+}(\xi(x_2))-f_{+}(\xi(x_1)))+q(f_{-}(\xi(x_2))-f_{-}(\xi(x_1)))](x_1-a)+[pf_{+}(\xi(x_2))+qf_{-}(\xi(x_2))](x_2-x_1). \quad (9)$$

又因为

$$f(x_2)-f(x_1)=[pf_{+}(\xi(x))+qf_{-}(\xi(x))](x_2-x_1), \quad (10)$$

所以

$$\{[pf_{+}(\xi(x))+qf_{-}(\xi(x))]-[pf_{+}(\xi(x_2))+qf_{-}(\xi(x_2))]\}(x_2-x_1)=[p(f_{+}(\xi(x_2))-f_{+}(\xi(x_1)))+q(f_{-}(\xi(x_2))-f_{-}(\xi(x_1)))](x_1-a), \quad (11)$$

其中 $x_1<\xi(x)<x_2,a<\xi(x_1)<x_1,a<\xi(x_2)<x_2,a<x_1<x_2<b$.

因为 $f_{+}(x)$,$f_{-}(x)$ 在 (a,b) 内单调增加,所以 $f_{+}(\xi(x))>f_{+}(\xi(x_1))$,$f_{-}(\xi(x))>f_{-}(\xi(x_1))$.

又因为

$$\{[pf_{+}(\xi(x))+qf_{-}(\xi(x))]-[pf_{+}(\xi(x_2))+qf_{-}(\xi(x_2))]\}(x_2-a)=[pf_{+}(\xi(x))+qf_{-}(\xi(x))](x_2-x_1)+[pf_{+}(\xi(x))+qf_{-}(\xi(x))](x_1-a)-[pf_{+}(\xi(x_2))+qf_{-}(\xi(x_2))](x_2-a)>[pf_{+}(\xi(x))+qf_{-}(\xi(x))](x_2-x_1)+[pf_{+}(\xi(x_1))+qf_{-}(\xi(x_1))](x_1-a)-[pf_{+}(\xi(x_2))+qf_{-}(\xi(x_2))](x_2-a), \quad (12)$$

结合(7)~(12)式,有

$$[pf_{+}(\xi(x))+qf_{-}(\xi(x))]-[pf_{+}(\xi(x_2))+qf_{-}(\xi(x_2))]>0.$$

再由(11)式可得

$$p(f_{+}(\xi(x_2))-f_{+}(\xi(x_1)))+q(f_{-}(\xi(x_2))-f_{-}(\xi(x_1)))>0. \quad (13)$$

又因为 $f_{+}(x)$,$f_{-}(x)$ 在 (a,b) 内严格单调,而 p,q 为非负常数,由(13)式,不难推出 $f_{+}(\xi(x_2))-f_{+}(\xi(x_1))$ 与 $f_{-}(\xi(x_2))-f_{-}(\xi(x_1))$ 同号且都大于零.所以 $f_{+}(\xi(x_2))>f_{+}(\xi(x_1)$,$f_{-}(\xi(x_2))>f_{-}(\xi(x_1))$.由 $f_{+}(x)$,$f_{-}(x)$ 在 (a,b) 内单调增加可知 $\xi(x_2)>\xi(x_1)$.

3　"中间点"ξ 的连续性及可导性

定理 2　设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续,在开区间 (a,b) 内左,右可导,又设 $f_{+}(x)$,$f_{-}(x)$ 在 (a,b) 内具有一阶连续的左、右导数且 $f'_{++}(x)$,$f'_{+-}(x)$,$f'_{-+}(x)$,$f'_{--}(x)$ 在 (a,b) 内保号(恒正或恒负),则(i) 满足(1)式的点 $\xi=\xi(x)$ 是 x 的连续函数;(ii) 满足(1)式的 $\xi=\xi(x)$ 是 x 的可导函数,其导数为

$$\xi'(x)=\{p[f_{+}(x)-f_{+}(\xi(x))]+q[f_{-}(x)-f_{-}(\xi(x))]\}/\{[p(pf'_{++}(\xi(x))+qf'_{+-}(\xi(x)))+q(pf'_{-+}(\xi(x))+qf'_{--}(\xi(x)))]\cdot(x-a)\}.$$

证明　(i) 由定理1知 $\xi=\xi(x)$ 是单调函数.再由已知条件可得

$$pf_{+}(\xi(x))+qf_{-}(\xi(x))=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}, \quad (14)$$

$$pf_{+}(\xi(x+h))+qf_{-}(\xi(x+h))=\frac{f(x+h)-f(a)}{x+h-a}.$$

因此

$$p[f_{+}(\xi(x+h))-f_{+}(\xi(x))]+q[f_{-}(\xi(x+h))-f_{-}(\xi(x))]=\frac{(x-a)[f(x+h)-f(x)]-h[f(x)-f(a)]}{(x+h-a)(x-a)}.$$

又因为

$$f_{+}(\xi(x+h))-f_{+}(\xi(x))=[pf'_{++}(\eta)+qf'_{+-}(\eta)][\xi(x+h)-\xi(x)], \quad (15)$$

$$f_{-}(\xi(x+h))-f_{-}(\xi(x))=[pf'_{-+}(\eta)+qf'_{--}(\eta)][\xi(x+h)-\xi(x)]. \quad (16)$$

当 $h\neq0$ 时,结合(15)式和(16)式,有

$$p[f_{+}(\xi(x+h))-f_{+}(\xi(x))]+q[f_{-}(\xi(x+h))-f_{-}(\xi(x))]=[p(pf'_{++}(\eta)+qf'_{+-}(\eta))+$$

$q(pf''_{-+}(\eta)+qf''_{--}(\eta))][\xi(x+h)-\xi(x)]$.

其中η介于$\xi(x+h)$与$\xi(x)$之间,从而当$h\to 0$时,

$\xi(x+h)-\xi(x)=\{(x-a)[f(x+h)-f(x)]-h[f(x)-f(a)]\}/\{[p(pf''_{++}(\eta)+qf''_{+-}(\eta))+q(pf''_{-+}(\eta)+qf''_{--}(\eta))](x+h-a)(x-a)\}\to 0$.

故$\xi=\xi(x)$在(a,b)内连续.

(ii) 由(i)有

$\lim\limits_{h\to 0}(p(pf''_{++}(\eta)+qf''_{+-}(\eta))+q(pf''_{-+}(\eta)+qf''_{--}(\eta)))=p(pf''_{++}(\xi(x))+qf''_{+-}(\xi(x)))+q(pf''_{-+}(\xi(x))+qf''_{--}(\xi(x)))\neq 0$.

设$f(x+h)-f(x)=h[pf_+(\eta_1)+qf_-(\eta_1)]$,则$\lim\limits_{h\to 0}[pf_+(\eta_1)+qf_-(\eta_1)]=pf_+(x)+qf_-(x)$.

因此

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\xi(x+h)-\xi(x)}{h}=$

$\lim\limits_{h\to 0}\{(x-a)\dfrac{[f(x+h)-f(x)]}{h}-[f(x)-f(a)]\}/\{[p(pf''_{++}(\eta)+qf''_{+-}(\eta))+q(pf''_{-+}(\eta)+qf''_{--}(\eta))](x+h-a)(x-a)\}=\lim\limits_{h\to 0}\{(x-a)[pf_+(\eta_1)+qf_-(\eta_1)]-f(x)+f(a)\}/[p(pf''_{++}(\eta)+qf''_{+-}(\eta))+q(pf''_{-+}(\eta)+qf''_{--}(\eta))](x+h-a)(x-a)\}=\{(x-a)[pf_+(x)+qf_-(x)]-f(x)+f(a)\}/\{[p(pf''_{++}(\xi(x))+qf''_{+-}(\xi(x)))+q(pf''_{-+}(\xi(x))+qf''_{--}(\xi(x)))](x-a)^2\}$. (17)

由(14)式和(17)式,有

$\xi'(x)=\{p[f_+(x)-f_+(\xi(x))]+q[f_-(x)-f_-(\xi(x))]\}/\{[p(pf''_{++}(\xi(x))+qf''_{+-}(\xi(x)))+q(pf''_{-+}(\xi(x))+qf''_{--}(\xi(x)))]\cdot(x-a)\}$.

定理3　设函数$f(x)$和$g(x)$在$[a,b]$上存在连续的二阶左右导数. 记$\Delta(+,+)=f_+(x_1)g'_+(x_2)-f_+(x_2)g'_+(x_1)$,$\Delta(+,-)=f_+(x_1)g'_-(x_2)-f_+(x_2)g'_-(x_1)$,$\Delta(-,+)=f_-(x_1)g'_+(x_2)-f_-(x_2)g'_+(x_1)$,$\Delta(-,-)=f_-(x_1)g'_-(x_2)-f_-(x_2)g'_-(x_1)$. 若$\Delta(+,+)$、$\Delta(+,-)$、$\Delta(-,+)$及$\Delta(-,-)$在$(a,b)$内保号(恒正或恒负),则(i) 满足(2)式的"中间点"$\xi=\xi(x)$是x的单值连续函数;(ii) 满足(2)式的"中间点"$\xi=\xi(x)$是x的可导函数,其导数为

$\xi'(x)=\{\Delta_3(\xi(x))[p\Delta_1(x)-p\Delta_2(x)+q\Delta_4(x)-q\Delta_5(x)]\}/\{\Delta_3(x)[p\Delta_1(\xi(x))-p\Delta_2(\xi(x))+q\Delta_4(\xi(x))-q\Delta_5(\xi(x))]\}$.

其中

$\Delta_1(x)=[pf''_{++}(x)+qf''_{-+}(x)][pg'_+(x)+qg'_-(x)]$,

$\Delta_2(x)=[pf_+(x)+qf_-(x)][pg''_{++}(x)+qg''_{-+}(x)]$,

$\Delta_3(x)=[pg'_+(x)+qg'_-(x)]^2$,

$\Delta_4(x)=[pf''_{+-}(x)+qf''_{--}(x)][pg'_+(x)+qg'_-(x)]$,

$\Delta_5(x)=[pf_+(x)+qf_-(x)][pg''_{+-}(x)+qg''_{--}(x)]$.

证明　(i) 记

$$\varphi(x)=\frac{pf_+(x)+qf_-(x)}{pg'_+(x)+qg'_-(x)},a<x<b.$$

先证明$\varphi(x)$是x的单调函数. 任取x_1,x_2,且$x_1<x_2$,则

$$\varphi(x_1)=\frac{pf_+(x_1)+qf_-(x_1)}{pg'_+(x_1)+qg'_-(x_1)},$$

$$\varphi(x_2)=\frac{pf_+(x_2)+qf_-(x_2)}{pg'_+(x_2)+qg'_-(x_2)},$$

$\varphi(x_1)-\varphi(x_2)=\dfrac{pf_+(x_1)+qf_-(x_1)}{pg'_+(x_1)+qg'_-(x_1)}-\dfrac{pf_+(x_2)+qf_-(x_2)}{pg'_+(x_2)+qg'_-(x_2)}=\{p^2\Delta(+,+)+pq[\Delta(+,-)+\Delta(-,+)]+q^2\Delta(-,-)\}/\{[pg'_+(x_1)+qg'_-(x_1)][pg'_+(x_2)+qg'_-(x_2)]\}$.

因为$\Delta(+,+)$、$\Delta(+,-)$、$\Delta(-,+)$及$\Delta(-,-)$在(a,b)内保号(恒正或恒负). 假设恒正,则$\varphi(x_1)-\varphi(x_2)>0$,故$\varphi(x)$是$x$的单调递减函数. 若$\Delta(+,+)$、$\Delta(+,-)$、$\Delta(-,+)$及$\Delta(-,-)$恒负,则$\varphi(x_1)-\varphi(x_2)<0$. 故$\varphi(x)$是的单调递增函数.

综上所述,$\varphi(x)$是x的单调函数,从而满足(2)式的"中间点"$\xi=\xi(x)$为x的单值函数.

再证明$\xi=\xi(x)$为x的连续函数. 由引理1及引理2有

$\dfrac{f(x+\Delta x)-f(a)}{g(x+\Delta x)-g(a)}-\dfrac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\dfrac{pf_+(\xi(x+\Delta x))+qf_-(\xi(x+\Delta x))}{pg'_+(\xi(x+\Delta x))+qg'_-(\xi(x+\Delta x))}-\dfrac{pf_+(\xi(x))+qf_-(\xi(x))}{pg'_+(\xi(x))+qg'_-(\xi(x))}=[p\varphi'_+(\eta)+q\varphi'_-(\eta)][\xi(x+\Delta x)-\xi(x)]$, (18)

其中η介于$\xi(x)$与$\xi(x+\Delta x)$之间,结合$\varphi(x)$的单调性有$p\varphi'_+(\eta)+q\varphi'_-(\eta)\neq 0$,所以$\lim\limits_{\Delta x\to 0}[\xi(x+\Delta x)-\xi(x)]=0$,因此$\xi=\xi(x)$是$x$的单值连续函数.

(ii) 由 $\varphi(x)$ 的定义,有

$$\varphi'_{+}(x)=\frac{\Delta_1(x)-\Delta_2(x)}{\Delta_3(x)},\varphi'_{-}(x)=\frac{\Delta_4(x)-\Delta_5(x)}{\Delta_3(x)}.$$

由引理1有

$$\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)=[p\varphi'_{+}(\xi_1)+q\varphi'_{-}(\xi_1)]\Delta x=[p\frac{\Delta_1(\xi_1)-\Delta_2(\xi_1)}{\Delta_3(\xi_1)}+q\frac{\Delta_4(\xi_1)-\Delta_5(\xi_1)}{\Delta_3(\xi_1)}]\Delta x=\frac{p\Delta_1(\xi_1)-p\Delta_2(\xi_1)+q\Delta_4(\xi_1)-q\Delta_5(\xi_1)}{\Delta_3(\xi_1)}\Delta x,\quad(19)$$

其中 ξ_1 介于 $x+\Delta x$ 与之间.

结合(18)式和(19)式,有

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\xi(x+\Delta x)-\xi(x)}{\Delta x}$ 存在,且

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\xi(x+\Delta x)-\xi(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{p\Delta_1(\xi_1)-p\Delta_2(\xi_1)+q\Delta_4(\xi_1)-q\Delta_5(\xi_1)}{\Delta_3(\xi_1)[p\varphi'_{+}(\eta)+q\varphi'_{-}(\eta)]}=\frac{p\Delta_1(x)-p\Delta_2(x)+q\Delta_4(x)-q\Delta_5(x)}{\Delta_3(x)[p\varphi'_{+}(\xi(x))+q\varphi'_{-}(\xi(x))]}.$$

故 $\xi=\xi(x)$ 是 x 的可导函数,其导数为

$$\xi'(x)=\{p\Delta_1(x)-p\Delta_2(x)+q\Delta_4(x)-q\Delta_5(x)\}/\{\Delta_3(x)[p\varphi'_{+}(\xi(x))+q\varphi'_{-}(\xi(x))]\}=\{\Delta_3(\xi(x))[p\Delta_1(x)-p\Delta_2(x)+q\Delta_4(x)-q\Delta_5(x)]\}/\{\Delta_3(x)[p\Delta_1(\xi(x))-p\Delta_2(\xi(x))+q\Delta_4(\xi(x))-q\Delta_5(\xi(x))]\}.$$

注 定理1、定理2、定理3分别是文献[1]中相关定理的推广.

参考文献:

[1] 刘龙章,戴立辉,杨志辉.再论微分中值定理"中间点"ξ的性质[J].大学数学,2007,23(4):163-166.

[2] 方初宝.数学分析选讲[M].南宁:广西人民出版社,1986.

(责任编辑:尹 闯)

美国科学家研发出砷化镓晶片批量生产技术

砷化镓是一种感光性能比当前广泛使用的硅更优良的材料,理论上它可以将接收到的阳光的40%转化为电能,转化率约是硅的两倍,因此卫星和太空飞船等多采用砷化镓作为太阳能电池板的材料。然而,传统的砷化镓晶片制造技术每次只能生成一层晶片,成本居高不下,限制了砷化镓的广泛应用。

最近美国的科学家开发出一种可批量生产砷化镓晶片的新技术。该技术可以生成由砷化镓和砷化铝交叠的多层晶体,然后利用化学物质使砷化镓层分离出来,从而可以同时生成多层砷化镓晶片,大大降低了成本。这些砷化镓晶片可以像"盖章"那样安装到玻璃或塑料等材料表面,然后使用已有技术进行蚀刻,根据需要制造半导体电路或太阳能电池板。不过,该技术目前还只能用于批量生产较小的砷化镓晶片,如边长500μm的太阳能电池单元,这与现在广泛使用的硅晶片相比还是太小。科学家的下一步研究将是致力于利用新技术批量生产更大的砷化镓晶片。

(据科学网)