

对流方程 GLx F 格式数值解振荡的可控性

The Controllable Quality of Oscillations in Numerical Solution of GLx F Scheme for Convection-equation

杨继昌, 沈柳平

YANG Ji-chang, SHEN Liu-ping

(柳州师范高等专科学校数学与计算机科学系, 广西柳州 545004)

(Department of Mathematics and Computer Science, Liuzhou Teachers College, Liuzhou, Guangxi, 545004, China)

摘要: 给出对流方程 $u_t + au_x = 0, x \in R, t > 0, a \in R$ 的广义 Lax-Friedrichs 格式 (GLx F 格式) 稳定的充要条件, 在数值粘性、网格比及初始数据离散点变化时用图例直观展示格式数值解的行为. 然后用傅利叶分析法证明 GLx F 格式数值解的振荡与数值粘性、网格比及初始数据奇偶离散的关系, 从理论上论证数值解的振荡是可控的.

关键词: 对流方程 数值解 振荡 傅利叶分析 控制

中图分类号: O175 **文献标识码:** A **文章编号:** 1002-7378(2010)01-0009-04

Abstract: Stable condition of GLx F scheme for convection-equation $u_t + au_x = 0, x \in R, t > 0, a \in R$ is proposed. By some figures, the behavior of numerical solution is intuitively presented when numerical viscosity, ratio of mesh and discrete point of initial data are changed. Then prove the interrelation among oscillation of numerical solution for GLx F scheme, numerical viscosity, ratio of mesh and odd-even discretization of initial data by Fourier analysis is proved. It is theoretically proved that oscillations of numerical solution are controllable.

Key words: convection-equation, numerical solution, oscillations, Fourier analysis, control

文献[1]建立了对流方程

$$u_t + au_x = 0, x \in R, t > 0, a \in R \quad (0.1)$$

的广义 Lax-Friedrichs 格式 (简称为 GLx F):

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{av}{2}(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) + \frac{q}{2}(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n), \quad (0.2)$$

其中 u_j^n 为格式逼近方程精确解 $u(x_j, t_n)$ 的逼近值, $v = \frac{\tau}{h}$, τ, h 分别为时间和空间步长, $q \in (0, 1]$ 为数值粘性系数, $|a|v \leq q$.

文献[2]认为, 用一个单调的格式逼近对流方程时, 如果数值解满足 TVD 性质、最大值原理及熵不等式等性质, 则 GLx F 格式的数值粘性可以抑制振荡的发生. 文献[3]讨论了 GLx F 格式尽管满足上述性质, 但是仍然避免不了振荡的发生. 对于这种看

起来自相矛盾的现象, 文献[1]给出的解释是由于 GLx F 格式只有高频波型解产生振荡. 但是, 对于控制振荡的机理, 文献[1]并没有作系统地论述. 本文在文献[1]的基础上, 寻求对流方程 (0.1) 的 GLx F 格式高频波型解振荡可以控制的依据.

1 GLx F 格式数值解在稳定性条件下的行为

1.1 GLx F 格式的稳定性

设 GLx F 格式有含波数 k 的波型解

$$u_j^n = \lambda^n e^{ikj}, i^2 = -1, \zeta = 2\pi kh, \quad (1.1)$$

将其代入 (0.2) 式, 可得 GLx F 格式数值解的振幅

$$\lambda = 1 + q(\cos \zeta - 1) - iav \sin \zeta, \quad (1.2)$$

则

$$|\lambda|^2 = [1 + q(\cos \zeta - 1)]^2 + a^2 v^2 \sin^2 \zeta = 1 + 4(a^2 v^2 - q) \sin^2 \frac{\zeta}{2} + 4(q^2 - a^2 v^2) \sin^4 \frac{\zeta}{2}. \quad (1.3)$$

一方面, 在建立 GLx F 格式时有条件 $|a|v \leq q$

≤ 1 , 自然有 $0 < a^2v^2 \leq q \leq 1$ (这里 $a \neq 0$, 否则研究方程(0.1)无实际意义), 在此条件下, 由(1.3)式, 可得

$$|\lambda|^2 = 1 + 4(a^2v^2 - q)(\sin^2 \frac{\zeta}{2} - \sin^4 \frac{\zeta}{2}) +$$

$$4q(q - 1)\sin^4 \frac{\zeta}{2} \leq 1,$$

则 GLxF 格式是稳定的.

另一方面, 若 $|\lambda|^2 \leq 1$, 由(1.3)式, 可得

$$(a^2v^2 - q) + (q^2 - a^2v^2)\sin^2 \frac{\zeta}{2} \leq 0,$$

即

$$(a^2v^2 - q) + [q - a^2v^2 + q(q - 1)]\sin^2 \frac{\zeta}{2} \leq 0. \tag{1.4}$$

当 $\zeta = 0$ 时, 有 $a^2v^2 \leq q$; 当 $\zeta = \pi$ 时, 有 $q \leq 1$.

于是有 $0 < a^2v^2 \leq q \leq 1$.

综上所述, 可知 $0 < a^2v^2 \leq q \leq 1$ 为 GLxF 格式稳定的充分且必要条件.

1.2 GLxF 格式数值解的行为

在稳定条件 $0 < a^2v^2 \leq q \leq 1$ 下, 对 GLxF 格式用脉冲初始数据

$$u_j^0 = \begin{cases} 1, & j = \frac{M}{2}, \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

进行离散, 其中 M 为网格点个数. 这里, 我们取 $M = 50, a = 0.5$, 空间长度 $x \in [0, 1]$, 时间长度 $T = 0.4$, 以此来观察 GLxF 格式数值解的行为.

情形 1 设网格比 $r = v = \frac{\tau}{h} = 0.8, q = 0.98$, 则数值解如图 1(a) 所示, 有明显振荡; 若 $r = 0.8, q = 0.95$, 则数值解如图 1(b) 所示, 振荡减弱; 若 $r = 0.8, q = 0.9$, 则数值解如图 1(c) 所示, 振荡消失.

由此作猜测 1: GLxF 格式数值解的振荡与数值粘性系数 q 有关, 当 q 减小时, 振荡减弱, 直至消失.

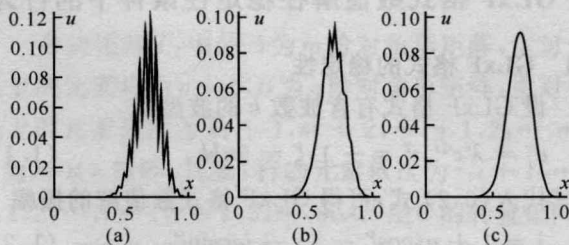


图 1 数值解的振荡与数值粘性的关系 ($r = 0.8$)
(a) $q = 0.98$; (b) $q = 0.95$; (c) $q = 0.9$.

情形 2 设网格比 $r = 0.9, q = 0.95$, 则数值解如图 2(a) 所示, 有振荡; 若 $r = 0.7, q = 0.95$, 则数

值解如图 2(b) 所示, 振荡减弱; 若 $r = 0.5, q = 0.95$, 则数值解如图 2(c) 所示, 振荡消失.

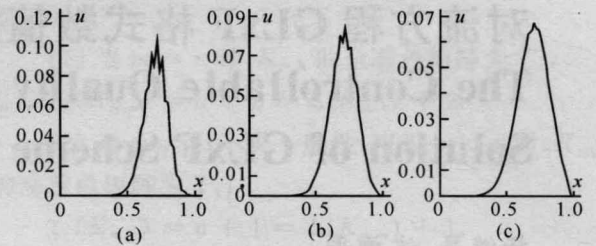


图 2 数值解的振荡与网格比的关系 ($q = 0.95$)
(a) $r = 0.9$; (b) $r = 0.7$; (c) $r = 0.5$.

由此作猜测 2: GLxF 格式数值解的振荡与网格比 r 有关, 当 r 减小时, 振荡减弱, 直至消失.

情形 3 不改变情形 1 的所有条件, 对 GLxF 格式改用方形脉冲初始数据

$$u_j^0 = \begin{cases} 1, & j = \frac{M}{2}, \frac{M}{2} + 1, \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

进行离散, 则数值解的行为如图 3 所示, 没有振荡. 类似地, 对情形 2 也用方形脉冲初始数据进行离散, 也没有振荡(图略).

由此作猜测 3: GLxF 格式数值解的振荡与初始数据的离散有关, 用偶数个离散点, 数值解没有振荡.

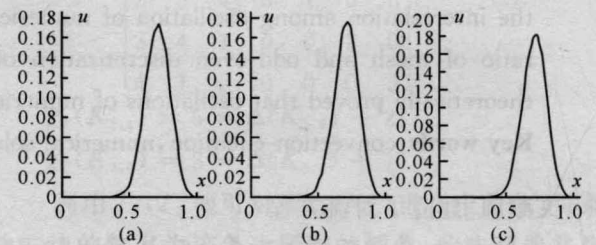


图 3 偶数个离散初始数据 ($r = 0.8$)
(a) $q = 0.98$; (b) $q = 0.95$; (c) $q = 0.9$.

2 GLxF 格式数值解振荡可以控制的证明

设 GLxF 格式的波型解如(1.1)式, 利用文献 [4] 第 135 页的修正方程分析方法, 可以得到 GLxF 格式高频波型 ($\zeta \approx \pi$) 的修正方程

$$\partial_t U + a \partial_x U = \frac{\ln(2q - 1)}{\tau} U + \frac{h^2}{2\tau} [q(2q - 1) - a^2v^2] \partial_x^2 U + \frac{a\tau h^2}{6} [(q + 1)(2q - 1) - 2a^2v^2] \partial_x^3 U + \dots, \tag{2.1}$$

其中 U 为格式逼近精确解 $u(x_j, t_n)$ 的逼近值, 常数项 $\frac{\ln(2q - 1)}{\tau} U$ 为高频波型的数值衰减项. 文献 [1] 已经明确了只有 GLxF 格式高频波型解产生振荡, 并且此振荡只能通过数值衰减来抑制, 那么由数值

衰减项的结构可知 $2q - 1 > 0$, 即 $q > \frac{1}{2}$. 再结合 GLx F 格式的稳定性条件 $0 < a^2 v^2 \leq q \leq 1$, 则有 $\frac{1}{2} < q \leq 1$. 我们用傅利叶分析法证明在 $\frac{1}{2} < q \leq 1$ 条件下 GLx F 格式高频波型解的振荡是可以控制的.

定理 1 对流方程 GLx F 格式高频波型解的振荡在 $\frac{1}{2} < q \leq 1$ 条件下随着数值粘性系数 q 或者网格比 r 减小而减弱, 当 $q = \frac{1}{2}$ 时振荡消失.

证明 一方面, 由(1.2)式, 可得

$$|\lambda|^2 = [1 + q(\cos \zeta - 1)]^2 + a^2 v^2 \sin^2 \zeta, \quad (2.2)$$

则 $\frac{d(|\lambda|^2)}{dq} = 2[1 + q(\cos \zeta - 1)] \cdot (\cos \zeta - 1)$, 当 $\zeta \approx \pi, \frac{1}{2} < q \leq 1$ 时, 有 $\frac{d(|\lambda|^2)}{dq} > 0$, 也就是说, 在 $\frac{1}{2} < q \leq 1$ 条件下, 当数值粘性系数 q 减小时, GLx F 格式数值解的振幅 λ 减小, 则数值耗散增强, 从而数值解的振荡减弱.

另一方面, 由于网格比 $r = v$, 则由(2.2)式可得 $\frac{d(|\lambda|^2)}{dr} = 2a^2 r \sin^2 \zeta$, 则当 $\zeta \approx \pi$ 时, 有 $\frac{d(|\lambda|^2)}{dr} > 0$, 也就是说, 在 $\frac{1}{2} < q \leq 1$ 条件下, 当网格比 r 减小时, GLx F 格式数值解的振幅 λ 减小, 则数值耗散增强, 从而数值解的振荡减弱.

又由于 $\lim_{q \rightarrow \frac{1}{2}+0} \frac{\ln(2q-1)}{\tau} U = -\infty$, 即 GLx F 格式高频波型修正方程的数值衰减项趋于无穷大, 这就意味着高频波型解的衰减趋于无穷大, 那么数值解就不会产生振荡. 实际上, 由(1.2)式也可以看出, 当 $q = \frac{1}{2}, \zeta = \pi$ 时, 有 $\lambda = 0$, 则高频波型解就是精确解, 这时数值解不产生振荡. 所以当 $q = \frac{1}{2}$ 时, 高频波型解的振荡消失. 定理 1 证明完毕.

由定理 1 可以知道, 对流方程 GLx F 格式数值解的振荡可以通过减小数值粘性系数 q 或者网格比 r 进行控制.

文献[1]已论述了对流方程 GLx F 格式初始数据的奇偶离散, 这里我们证明这种奇偶离散是如何控制振荡的.

定理 2 如果用偶数个点离散对流方程 GLx F 格式数值解的初始数据, 则数值解不产生振荡.

证明 考虑对流方程 GLx F 格式数值解的方形信号初始数据

$$u(x, 0) = \begin{cases} 1, & 0 < x_1 < x < x_2 < 1, \\ 0, & \text{其它}, \end{cases} \quad (2.3)$$

用 M (这里设 M 为偶数) 个网格点及步长 $h = \frac{1}{M}$ 进行网格剖分. 设数值解在网格点 x_j 处的值用 u_j^0 表示, 则可用离散的傅利叶和将 u_j^0 表示为

$$u_j^0 = \sum_{k=-\frac{M}{2}+1}^{\frac{M}{2}} C_k^0 e^{i\zeta j}, \quad j = 0, 1, \dots, M-1. \quad (2.4)$$

经过变形, 系数 C_k^0 可表示为

$$C_k^0 = \frac{1}{M} \sum_{j=0}^{M-1} u_j^0 e^{-i\zeta j}, \quad k = -\frac{M}{2} + 1, \dots, \frac{M}{2}. \quad (2.5)$$

(1) 奇数个网格点离散. 设 $j_1, j_2 \in N$ 且 $j_1 + j_2$ 为偶数, $x_1 = (\frac{M}{2} - j_1)h, x_2 = (\frac{M}{2} + j_2)h$, 用 $p = j_1 + j_2 + 1$ 个点离散初始数据(2.3), 则

$$u_j^0 = \begin{cases} 1, & j = \frac{M}{2} - j_1, \dots, \frac{M}{2} + j_2, \\ 0, & \text{其它}, \end{cases} \quad (2.6)$$

代入(2.5)式, 可得

$$C_k^0 = h \sum_{j=0}^{M-1} u_j^0 e^{-i\zeta j} = \begin{cases} \frac{(-1)^k e^{i\zeta j_1} (1 - e^{-i\zeta p})}{M(1 - e^{-i\zeta})}, & k \neq 0, \\ ph, & k = 0, \end{cases} \quad (2.7)$$

特别地, 有 $C_{\frac{M}{2}}^0 = (-1)^{j_1 + \frac{M}{2}} h$, 由于 M 为偶数, p 为奇数, 则(2.6)式可表示为

$$u_j^0 = (-1)^{j+j_1+\frac{M}{2}} h + ph + \sum_{k \neq 0, \frac{M}{2}} \frac{(-1)^k e^{i\zeta(j+j_1)} (1 - e^{-i\zeta p})}{M(1 - e^{-i\zeta})}. \quad (2.8)$$

(2) 偶数个网格点离散. 与(1)类似, 但是用偶数 $p = j_1 + j_2$ 个网格点离散初始数据(2.3), 则

$$u_j^0 = \begin{cases} 1, & j = \frac{M}{2} - j_1 + 1, \dots, \frac{M}{2} + j_2, \\ 0, & \text{其它}, \end{cases} \quad (2.9)$$

代入(2.5)式, 可得

$$C_k^0 = \begin{cases} \frac{(-1)^k e^{-i\zeta(j_1-1)} [1 - e^{-i\zeta(p-1)}]}{M(1 - e^{-i\zeta})}, & k \neq 0, \\ (p-1)h, & k = 0, \end{cases}$$

特别地, 有 $C_{\frac{M}{2}}^0 = 0$, 则(2.9)式可表示为

$$u_j^0 = 0 \times (-1)^j + (p-1)h + \sum_{k \neq 0, \frac{M}{2}} \frac{(-1)^k e^{-i\zeta(j+j_1-1)} [1 - e^{-i\zeta(p-1)}]}{M(1 - e^{-i\zeta})}. \quad (2.10)$$

比较(2.8)式与(2.10)式可以看到, (2.8)式中存在棋盘波型 $(-1)^{j+j_1+\frac{M}{2}}$, 则数值解有振荡. 而在(2.10)式中, 棋盘波型被过滤掉了. 所以, 用偶数

个点离散初始数据时数值解不会产生振荡. 定理 2 证明完毕.

参考文献:

- [1] Li Jiequan, Tang Huazhong, Gerald Warnecke, et al. Local oscillations in finite difference solutions of hyperbolic conservation laws [J]. Mathematics of Computation, 2009(78):1997-2018.
- [2] Leveque R. Numerical methods for conservation laws; Lectures in Mathematics ETH Zurich [M]. 2nd

ed. Basel; Birkhauser Verlag, 1992.

- [3] Breuss M. An analysis of the influence of data extrema on some first and second order central approximations of hyperbolic conservation laws [J]. M2AN Math Model Numer Anal, 2005(39):965-993.
- [4] Morton K W, Mayers D F. 偏微分方程数值解[M]. 李治平, 门大力, 许现民, 等译. 北京: 人民邮电出版社, 2006.

(责任编辑: 韦廷宗 邓大玉)

(上接第 8 页)

参考文献:

- [1] Behzad M. Graph and their chromatic number[D]. Michigan; Michigan State University, 1965:1-20.
- [2] 田永成, 田新, 田永兴, 等. n 阶完全图全着色的构造及推广[J]. 东北大学学报: 自然科学版, 2002, 23(1):95-98.
- [3] 田永成, 田永兴, 田新. 一类图的全着色构造[J]. 东北大学学报: 自然科学版, 2003, 24(9):915-918.

- [4] Bondy J A, Murty U S R. Graph theory with applications[M]. London; Mcmillan Press, 1976:97-141.
- [5] Vijayditya N. On total chromatic number of a graph [J]. London Math Soc, 1971, 3(2):405-408.
- [6] 张禾瑞, 郝新. 高等代数[M]. 第五版. 北京: 高等教育出版社, 2007:184-202.

(责任编辑: 韦廷宗)