广西科学院学报
Journal of Guangxi Academy of Sciences

2010,26(1):7～8,12
Vol. 26, No. 1 February 2010

完全二部图全着色的构造

Structure of Total Colouring of Complete Bipartite Graph

潘玉美,莫明忠
PAN Yu-mei, MO Ming-zhong

(柳州师范高等专科学校数学与计算机科学系,广西柳州 545003)
(Department of Mathematics and Computer Science, Liuzhou Teachers College, Liuzhou, Guangxi, 545003, China)

摘要:利用全着色矩阵给出完全二部图全着色的构造,该构造可以方便快捷对完全二部图进行全着色.

关键词:完全二部图 全着色矩阵 全着色的构造

中图法分类号:O157.5 **文献标识码**:A **文章编号**:1002-7378(2010)01-0007-02

Abstract: This paper makes use of a total colouring matrix to give a total colouring strcture of the complete bipartite graph, which is very simple and convienient for the total colouring of the complete bipartite graph.

Key words: complete bipartite graph, total colouring matrix, total colouring structure

M. Behzad 于 1965 年提出了著名的全着色猜想[1]:对于任意 n 阶简单图 $G(V,E)$,$V\cup E$ 的元素都可以用 $\Delta(G)+2$ 种颜色着色,使得任何两个相邻或关联的元素都着有不同的颜色,即 $x_T(G)\leqslant\Delta(G)+2$,其中 $\Delta(G)$ 为 G 的最大度数。在文献[2,3]中,田永成等人引进了全着色矩阵,并利用全着色矩阵简洁地给出了完全图及一些图类的全着色构造,同时由全着色矩阵推得一个与 M. Behzad 全着色猜想等价的命题,从而将解决全着色猜想问题转化为全着色矩阵是否存在问题。本文给出完全二部图的全着色矩阵,利用该矩阵可以简单快捷对完全二部图进行全着色.

1 预备知识

设 G 是 n 阶简单图,$V(G)$,$E(G)$ 分别是 G 的顶点集、边集,$E^+=V\cup E$ 称为 G 的增广边集,其中 $e_{ij}=e_{ji}\in E^+$,$e_{ii}=v_i\in E^+$,称 e_{ii} 与 $e_{ij},e_{ik},\cdots,e_{il}$ 关联,e_{ij} 与 $e_{ik},\cdots,e_{il},e_{ii}$ 与 e_{jj} 邻接($i,j,k,l\in I_n=\{1,2,\cdots,n\}$),$e_{ii},e_{jj}$ 称为退化边.

定义 1 图 G 的 k- 全着色是指用 k 种颜色给 E^+ 中的元素着色,使得任何两个相邻接或关联的元素都着有不同的颜色;G 的全着色所用颜色的最少数目称为 G 的全色数,记作 $\chi_T(G)$.

定义 2 将 n 阶图 G 的邻接矩阵 $A(G)$ 的主对角线上元素 0 全换为 1 而得到的矩阵称为 G 的增广邻接矩阵,记作 $A^+(G)=(a_{ij})_{n\times n}$,其中 $e_{ij}\in E^+$,$a_{ij}=1$,$e_{ij}\notin E^+$,$a_{ij}=0(1\leqslant i,j\leqslant n)$.

定义 3 设 $T=(t_{ij})$ 是 n 阶对称方阵,若它的任一行(列)的非零元素各不相同,主对角线上都是非零元素,当 $t_{ii}=t_{jj}$ 时,$t_{ij}=t_{ji}=0(i,j\in I_n)$,若 T 中不同的非零元素的个数为 t,则称 T 为 n 阶 t 全着色矩阵;若 T 中不同的非零元素的最少个数为 t_1,则称 t_1 为 T 的全色数;设 T 中第 i 行(列)的不同的非零元素的个数为 $t_i(i\in I_n)$,$t_0=\max\limits_{i\in I_n}t_i$,则称 t_0 为 T 的行(列)基数;不失一般性,可设 T 的非零元素为从 1 开始的相邻的自然数,显然,$t_0\leqslant t_1$.

文献[2]给出了 n 阶完全图全着色的构造,提出了与全着色猜想等价的命题:

命题 若全着色猜想成立,当且仅当存在 n 阶 $t_1(=x_T(G))$ 全着色矩阵类,对其中任一矩阵 T,使 $t_1\leqslant t_0+1$,其中 t_1 是 T 的全色数,t_0 是 T 的行(列)

收稿日期:2009-05-25
修回日期:2009-09-21
作者简介:潘玉美(1974-),女,讲师,主要从事图论与组合研究工作。

基数.

文中未定义的术语和记号见文献[4～6].

2 主要结果

由等价命题和全着色矩阵可以给出完全二部图全着色的构造.

引理 设 m,n 为非负整数,则存在 $m+n$ 阶全着色矩阵.

(1) 当 $m=n$ 时,全着色矩阵为

$$T_1=\left(\begin{array}{ccccc:ccccc} n+1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ 0 & n+1 & \cdots & 0 & 0 & 2 & 3 & \cdots & n & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & n+1 & 0 & n-1 & n & \cdots & n-3 & n-2 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & n+1 & n & 1 & \cdots & n-2 & n-1 \\ \hdashline 1 & 2 & \cdots & n-1 & n & n+2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 2 & 3 & \cdots & n & 1 & 0 & n+2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n-1 & n & \cdots & n-3 & n-2 & 0 & 0 & \cdots & n+2 & 0 \\ n & 1 & \cdots & n-2 & n-1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n+2 \end{array}\right)=\begin{pmatrix} A & C \\ C & B \end{pmatrix}.$$

分块矩阵 T_1 中的 A 和 B 都是 n 阶对角形矩阵,主对角线上的元素分别为 $n+1$ 和 $n+2$,C 为 $n\times n$ 矩阵,其第 i 行的元素依次为 $i,i+1,\cdots,n,1,2,\cdots,i-1,i=1,2,\cdots,n$.

(2) 当 $m\neq n$ 时,不失一般性,可设 $m<n$,全着色矩阵为

$$T_2=\left(\begin{array}{ccccc:ccccc} n+1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ 0 & n+1 & \cdots & 0 & 0 & 2 & 3 & \cdots & n & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & n+1 & 0 & m-1 & m & \cdots & m-3 & m-2 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & n+1 & m & m+1 & \cdots & m-2 & m-1 \\ \hdashline 1 & 2 & \cdots & m-1 & m & m+1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 2 & 3 & \cdots & m & m+1 & 0 & m+2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n-1 & n & \cdots & m-3 & m-2 & 0 & 0 & \cdots & m-1 & 0 \\ n & 1 & \cdots & m-2 & m-1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & m \end{array}\right)=\begin{pmatrix} A & C \\ C^T & B \end{pmatrix}.$$

分块矩阵 T_2 中的 A 为 m 阶对角形矩阵,主对角线上的元素均为 $n+1$,B 为 n 阶对角形矩阵,主对角线上的元素分别为 $m+1,m+2,\cdots,n,1,2,\cdots,m$,$C$ 为 $m\times n$ 矩阵,其第 i 行的元素依次为 $i,i+1,\cdots,n,1,2,\cdots,i-1,i=1,2,\cdots,m$,$C^T$ 是 C 的转置矩阵。

由等价命题知,将 T_1,T_2 中的所有非零元素全换为 1,则可得到完全二部图 $K_{m,n}$ 的增广邻接矩阵 $A^+(K_{m,n})$,而 T_1,T_2 便是 $K_{m,n}$ 的全着色矩阵,其中 e_{ij} 着 t_{ij} 色,$e_{ii}=v_i$ 着 t_{ii} 色,$t_{ii}=t_{jj}$ 时,$t_{ij}=t_{ji}=0$,即 $e_{ij}\notin K_{m,n}(i,j\in I_0)$,于是有

定理 设 m,n 为非负整数,$K_{m,n}$ 为完全二部图,则

(1) 当 $m=n$ 时,$K_{m,n}$ 的全着色矩阵为 T_1,
$\chi_T(K_{m,n})=n+2=\Delta(K_{m,n})+2$.

(2) 当 $m\neq n$,不失一般性,可设 $m<n$ 时,$K_{m,n}$ 的全着色矩阵为 T_2,,

$\chi_T(K_{m,n})=n+1=\Delta(K_{m,n})+1$.

3 举例

例 完全二部图 $K_{3,3}$,$K_{3,4}$ 的全着色矩阵分别为 T_1 和 T_2,其中

$$T_1=\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 5 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix},$$

$$T_2=\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 0 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 3 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix},$$

$\chi_T(K_{3,3})=5=\Delta(K_{3,3})+2$,

$\chi_T(K_{3,4})=5=\Delta(K_{3,4})+1$.

利用 T_1,T_2 便可对 $K_{3,3}$,$K_{3,4}$ 进行全着色,每条边左边的数字为该条边所着的颜色,此法简单并且快捷(见图 1 和图 2).

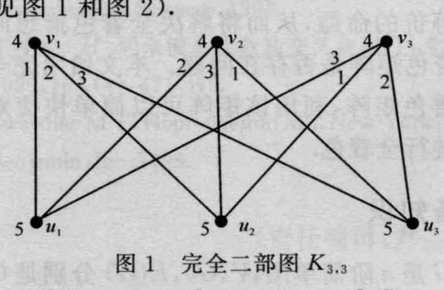

图 1 完全二部图 $K_{3,3}$

图 2 完全二部图 $K_{3,4}$

(下转第 12 页)

个点离散初始数据时数值解不会产生振荡. 定理2证明完毕.

参考文献:

[1] Li Jiequan, Tang Huazhong, Gerald Warnecke, et al. Local oscillations in finite difference solutions of hyperbolic conservation laws [J]. Mathematics of Computation, 2009(78): 1997-2018.

[2] Leveque R. Numerical methods for conservation laws: Lectures in Mathematics ETH Zurich [M]. 2nd ed. Basel: Birkhauser Verlag, 1992.

[3] Breuss M. An analysis of the influence of data extrema on some first and second order central appoximations of hyperbolic conservation laws [J]. M2AN Math Model Numer Anal, 2005(39): 965-993.

[4] Morton K W, Mayers D F. 偏微分方程数值解[M]. 李治平, 门大力, 许现民, 等译. 北京: 人民邮电出版社, 2006.

(责任编辑:韦廷宗 邓大玉)

(上接第8页)

参考文献:

[1] Behzad M. Graph and their chromatic numder[D]. Michigan: Michigan State University, 1965: 1-20.

[2] 田永成, 田新, 田永兴, 等. n阶完全图全着色的构造及推广[J]. 东北大学学报: 自然科学版, 2002, 23(1): 95-98.

[3] 田永成, 田永兴, 田新. 一类图的全着色构造[J]. 东北大学学报: 自然科学版, 2003, 24(9): 915-918.

[4] Bondy J A, Murty U S R. Graph theory with applications[M]. London: Mcmillan Press, 1976: 97-141.

[5] Vijayditya N. On total chromatic numder of a graph [J]. London Math Soc, 1971, 3(2): 405-408.

[6] 张禾瑞, 郝新. 高等代数[M]. 第五版. 北京: 高等教育出版社, 2007: 184-202.

(责任编辑:韦廷宗)