广西科学院学报 2010,26(1):1~3
Journal of Guangxi Academy of Sciences Vol. 26,No. 1 February 2010

解非线性方程牛顿迭代法的一种新的加速技巧*

A New Acceleration Technique of Newton Iterative Method for Solving Nonlinear Equation

倪 健[1],马昌凤[1,2]
NI Jian[1],MA Chang-feng[1,2]

(1.桂林电子科技大学数学与计算科学学院,广西桂林 541004;2.福建师范大学数学与计算机科学学院,福建福州 350007)
(1. School of Mathematics and Computational Science, Guilin Electronic Technology, Guilin, Guangxi, 541004, China; 2. School of Mathematics and Computer Science, Fujian Normal University, Fuzhou, Fujian, 350007, China)

摘要:通过对非线性方程求根牛顿迭代法的分析,给出牛顿迭代法的一种新的加速技巧,并通过数值算例验证所作的理论分析.数值结果表明该加速方法是行之有效的.

关键词:非线性方程 牛顿迭代法 全局收敛
中图法分类号:O151.1 **文献标识码**:A **文章编号**:1002-7378(2010)01-0001-03

Abstract: By analyzing the Newton iterative method for nonlinear equation, a new acceleration technique of Newton method is proposed. Numerical results indicate that the acceleration method is effective.

Key words: nonlinear equation, Newton method, global convergence

方程求根的牛顿法因为方法简单和收敛速度快而被广泛应用于科学与工程计算中,如非线性断裂问题、弹塑性问题及其他非线性力学问题、电路问题、电力系统计算、经济与非线性规划问题、逆变消谐问题等.但是这类方法大多只满足局部收敛性[1~6].本文引入步长因子,使得牛顿法通过加速后,具有三阶收敛速度,并在较弱的条件下,满足全局收敛性.

1 算法

考虑非线性方程

$$f(x)=0, \tag{1.1}$$

$f:R^1\rightarrow R^1$ 为一非线性映射.设 x^* 是方程 $f(x)$ 的单根,$f(x)$ 在区间$[a,b]$上满足二阶连续可微,则可以使用如下迭代格式求解:

$$\begin{cases} y_k = x_k - \dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \\ x_{k+1} = y_k - \dfrac{f(y_k)}{f'(x_k)} \end{cases}, k=0,1,2,\cdots \tag{1.2}$$

迭代格式(1.2)要求初始点 x_0 要充分接近零点 x^*.但是如果函数 $f(x)$ 为凸函数,则可以弱化对初始点的条件,实现全局收敛.

由此,我们提出下面的算法:

算法1

步骤0:任意给定初始点 x_0,ε,置 $k:=0$;

步骤1:如果 $|f(x_k)|<\varepsilon$,停止计算,输出 x_k 作为近似根;

步骤2:计算 $y_k=x_k-\dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}$,$x_{k+1}=y_k-\dfrac{f(y_k)}{f'(x_k)}$;

步骤3:令 $x_k=x_{k+1}$,计算 $f(x_k)$;

步骤4:置 $k:=k+1$,转步骤1.

2 收敛性分析

定理1 设方程 $f(x)$ 的零点为 x^*,其中,$f(x)$

收稿日期:2009-11-11
作者简介:倪 健(1983-),男,硕士研究生,主要从事非线性数值分析研究。
*国家自然科学基金项目(10661005)资助。

在区间$[a,b]$上二阶连续可微，且满足$f'(x)\neq 0$，则初始点x_0要充分接近零点x^*时，迭代格式(1.2)产生的迭代序列收敛于x^*.

证明　令$\varphi(x)=x-\frac{f(x)}{f'(x)}$，则迭代格式(1.2)可以写为：

$$\phi(x)=\varphi(x)-\frac{f(\varphi(x))}{f'(x)},$$

可知，当$x=x^*$时，$\varphi(x^*)=x^*$及

$$\phi(x^*)=\varphi(x^*)-\frac{f(\varphi(x^*))}{f'(x^*)}=x^*-\frac{f(x^*)}{f'(x^*)}=x^*,$$

故$\varphi(x^*)$和$\phi(x^*)$有相同的不动点. 由于$f'(x)\neq 0,\forall x\in[a,b]$，故有

$$\varphi'(x)=1-\frac{[f'(x)]^2-f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}=\frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2};$$

$$\phi'(x)=\varphi'(x)-\frac{[f'(\varphi(x))\varphi'(x)f'(x)-f(\varphi(x))f''(x)}{[f'(x)]^2},$$

由于$\varphi'(x^*)=0,f(x^*)=0$，易知$\phi'(x^*)=0$，故迭代格式(1.2)是收敛的，且收敛于x^*.

定理2　设方程$f(x)$的零点为x^*，其中，$f(x)$在区间$[a,b]$上二阶连续可微，且满足$f'(x)\neq 0$，则迭代格式(1.2)产生的迭代序列三阶收敛.

证明　设牛顿法的迭代公式是

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)},$$

则相应的迭代函数是

$$\varphi(x)=x-\frac{f(x)}{f'(x)}.$$

由牛顿法的收敛速度至少是二阶的可知

$$\varphi(x^*)=x^*,\varphi'(x^*)=0,\varphi''(x^*)\neq 0.$$

迭代格式(1.2)所述加速方法的迭代函数是：

$$\phi(x)=\varphi(x)-\frac{f(\varphi(x))}{f'(x)},\tag{2.1}$$

其中，$\varphi(x)=x-\frac{f(x)}{f'(x)}$. 由定理1知：$\phi(x^*)=x^*$. 对(2.1)两边求导数得：

$$\phi'(x)=\varphi'(x)-\frac{f'[\varphi(x)]\varphi'(x)f'(x)-f[\varphi(x)]f''(x)}{(f'(x))^2},\tag{2.2}$$

由于$\varphi'(x^*)=x^*,f(x^*)=0$，易知$\phi'(x^*)=0$.

对(2.2)式两边再求一次导数得：

$$\phi''(x)=\varphi''(x)(1-\frac{f[\varphi(x)]}{f'(x)})-\varphi'(x)(\frac{\varphi'(x)f''[\varphi(x)]}{f'(x)}-\frac{2f'[\varphi(x)]f''(x)}{[f'(x)]^2})-\frac{f[\varphi(x)]}{(f'(x)^{-1})''},\tag{2.3}$$

当$x=x^*$时，(2.3)式右端第一项为0，其余两项含有因子$\varphi'(x^*)$或$f[\varphi(x)]$，它们二者都等于0，则$\phi''(x)=0$.

由于x^*是方程$f(x)=0$的单根，则牛顿法的收敛速度至少是二阶的，由此可得，迭代格式(1.2)所述的加速方法至少是三阶的.

定理3　假定$f:R^1\to R^1$在凸集D上可微，f是凸的当且仅当

$$f(y)-f(x)\geqslant f'(y-x),\forall x,y\in R^1.$$

定理4　假设$f:R^1\to R^1$是连续可微的凸函数，对任意$x\in R^1$，$f'(x)\neq 0$. 同时假设$f(x)=0$有一个解x^*. 那么，对任意初始点$x_0\in R^1$，若$f'(x)>0$对所有x都成立，则(1.2)式产生的迭代序列单调递减且收敛于x^*(若$f'(x)<0$，则x_k单调递增收敛于x^*)，而且x^*是唯一的.

证明　对任意$x_0\in R^1$，不妨假设$f(x)>0$，对所有x都成立.

首先我们证明序列$\{x_k\}$单调递减且收敛于x^*. 由函数凸性及迭代公式可以得到

$$f(x_k)\geqslant f(x_{k-1})+f'(x_{k-1})(x_k-x_{k-1})=0,k=1,2,\cdots$$

由函数的单调性得到：$x_k\geqslant x^*,k=1,2,\cdots$

由已知条件得

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}-\frac{f(x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)})}{f'(x_k)},$$

由已知条件：对任意初始点$x_0\in R^1$，$f'(x)>0$及$f(x)$，易知$x_{k+1}\leqslant x_k$. 所以我们得到：$x_k\geqslant x_{k+1}\geqslant x^*$. 由此推导出$\lim\limits_{k\to\infty}x_k$存在.

接着证明极限为x^*. 由$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}-\frac{f(x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)})}{f'(x_k)}$得

$$\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}=x_k-x_{k+1}-\frac{f(x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)})}{f'(x_k)},$$

推导可知，当$k\to\infty$时，$|f(x^*)|=0$，所以$f(x^*)=0$.

最后证明x^*的唯一性. 设x^*和y^*是$f(x^*)=0$的不同的两个根. 我们有：

$$0=f(x^*)-f(y^*)\geqslant f'(y^*)(x^*-y^*),$$

所以$x^*\leqslant y^*$. 同理我们得到$y^*\leqslant x^*$，即$x^*=y^*$.

3 数值实验

我们选取一些比较典型的代数方程和超越方程,在 MATLAB 环境下进行数值模拟,验证算法 1 的有效性.

实验方程如下:

例 1:$f(x)=(x-6)^5-10(x-6)^4+38(x-6)^3-68(x-6)^2-57(x-6)-8=0$, $x\in[6,7]$;

例 2:$f(x)=x^4-12x^3+47x^2-60x=0$, $x\in[4.5,6]$;

例 3:$f(x)=x^4-12x^3+47x^2-60x+24=0$, $x\in[0.95,2]$;

例 4:$f(x)=x^4-3x^3+x-5=0$, $x\in[3,4]$;

例 5:$f(x)=x^2-\sin x=0$, $x\in[0.5,2]$;

例 6:$f(x)=x^4-\ln(x+1)=0$, $x\in[0.5,1]$;

例 7:$f(x)=e^{-x^2}-\ln(x+1)=0$, $x\in[0,1]$;

例 8:$f(x)=2e^{-x}-\sin x=0$, $x\in[0,1]$;

在实验中,取参数 $\delta=0.5$,终止准则 $|f(x_k)|<10^{-10}$. 用算法 1 计算所得数值结果如表 1 所示.

表 1　例 1～例 8 的数值结果

方程	有根区间	初始点	迭代次数	迭代解 (x_k)	$\|f(x_k)\|$ 的值
例 1	[6,7]	6.0	6	5.8137	1.4744e−13
例 2	[4.5,6]	6.0	7	5.0000	1.1369e−13
例 3	[0.95,2]	1.2	6	1.0000	1.4921e−13
例 4	[3,4]	3.0	5	3.0670	6.2172e−15
例 5	[0.5,2]	1.0	5	0.8767	9.4369e−15
例 6	[0.5,1]	1.0	10	0.8940	9.2679e−11
例 7	[0,1]	1.0	12	0.7571	8.1693e−11
例 8	[0,1]	1.0	4	0.9210	5.6954e−11

表 2 验证了算法 1 的全局收敛性.

表 2　例 8 对于不同初始点的数值结果

初始点 (x_0)	迭代次数	CPU 时间	$\|f(x_k)\|$ 的值
0.0	6	3.93e−04	7.8826e−15
1.0	4	4.01e−04	5.6954e−11
10.0	4	3.82e−04	2.0302e−12
−10.0	10	5.24e−04	1.1102e−16
−20.0	12	4.55e−04	1.3367e−13
−50.0	22	5.27e−04	1.3367e−13
−100.0	40	6.60e−04	0

参考文献:

[1] 刘国祥.方程求根的牛顿法的加速[J].赤峰学院学报:自然科学版,2007,23(5):18.

[2] 徐勤亚.一维凸函数牛顿法的全局收敛性及其应用[J].应用数学与计算数学学报,2002,16(2):68-72.

[3] Chen Bilian,Ma Changfeng. A note on modified Householder iterative method free from second derivatives for nonlinear equations [J]. Applied Mathematics and Computation,2008,203(2):913-915.

[4] 同济大学计算数学教研室.现代数值数学和计算[M].上海:同济大学出版社,2004.

[5] 曾金平,李郴良.数值计算方法[M].长沙:湖南大学出版社,2004.

[6] 马昌凤,林伟川.现代数值计算方法[M].北京:科学出版社,2008.

(责任编辑:韦廷宗)

新型酵母使植物纤维转化的两种糖同时发酵

随着世界能源短缺趋势的日益严重,生物燃料作为一种可再生能源,成为解决能源危机的途径之一。以植物纤维素为主要原料的第二代生物能源不仅使用的是玉米秸秆、谷物秸秆等农业废弃物,以及锯屑和纸浆等工业废弃物,而且可以减少二氧化碳的排放量高达 89%,减缓传统生物能源对粮食作物消耗的压力。但是,利用植物纤维素制造乙醇燃料的技术瓶颈是生产的乙醇浓度低,原料需求量大,生产成本高。利用纤维素分解酶生产乙醇燃料,首先是使纤维素转化成五碳糖和六碳糖。在传统工艺中无法让这两种糖同时发酵。美国科学家发明了一种新型的何-普度(Ho-Purdue)酵母,能够同时发酵这两种糖,并得到乙醇。无论是哪种植物纤维,酵母发酵的条件都相同,并且生产的酒精浓度可以达到 8%,同时还可以生产出其他共生产品,如酶、营养物质等,因此可以进一步降低成本,让“与人抢粮”的传统生物燃料不再“尴尬”。

(据科学网)