广西科学院学报 2009,25(3):163～167
Journal of Guangxi Academy of Sciences Vol. 25,No. 3 August 2009

斜坡型需求且短缺量部分拖后订购的易变质物品库存模型*

A Deteriorating Inventory Model with Ramp Type Demand Rate and Shortage Partial Backlogging

黄远良,兰继斌
HUANG Yuan-liang,LAN Ji-bin

(广西大学数学与信息科学学院,广西南宁 530004)
(College of Mathematics and Information Science, Guangxi University, Nanning, Guangxi, 530004,China)

摘要:建立一个斜坡型需求且短缺量部分拖后订购的易变质物品库存模型,研究指数斜坡型需求模式下变质率为 Weibull 分布形式的易变质物品库存管理问题,分析允许短缺下两种可能情形的单位时间库存成本函数,得到易变质物品的最优库存补充策略.数值算例表明模型符合实际情况.

关键词:易变质物品 库存模型 Weibull 分布
中图法分类号:O227 **文献标识码**:A **文章编号**:1002-7378(2009)03-0163-05

Abstract:In this paper, an inventory model for deterioration items with ramp type demand rate and shortage partial backlogging is built. The inventory management problem of deterioration items with Weibull distribution under exponentially ramp type demand is investigated. The total inventory cost functions of two cases per unit of time under the shortageconditions are analyzed and an optimal replenishment policy of deterioration items is derived. Finally, numerical examples also indicate the inventory model meet practical situation.

Key words:deterioration items,inventory model,Weibull distribution

自 20 世纪 60 年代以来,易变质物品的库存管理问题受到了研究者的广泛关注,易变质物品是指在存贮过程中发生腐烂、性能衰退和分解的一类物品,比如水果的腐烂、药品的功能失效等.这类物品对库存的影响是很明显的,因此如何有效地降低这一类物品的库存对企业来说非常重要.Ghare 等[1]最先研究了变质率和需求率均为常数的易变质物品库存问题.随后,Covert 等[2]将常数变质率推广到两参数 Weibull 分布情形.对于时变需求的研究,Hill[3]研究了需求率线性增长随后恒定的斜坡型需求模式.Deng 等[4]提出了一种求解 Hill 的斜坡型需求模式的库存问题的有效解法.Panda 等[5]研究了具有另一种斜坡型需求模式的季节物品的最优补货策略问题.Cheng 等[6]研究了梯形需求模式的易变质物品库存模型.上述研究中未被满足需求取决于下一次补货的时刻.一般来说,缺乏耐心的顾客如果遇到很长的排队等待的队伍时会转到别的商家购买.为此,Padmanabhan 等[7]首先研究了这种情形下的库存问题.Ouyang 等[8]在文献[7]的基础上研究了通货膨胀和资金时间价值情况下有限时域内的易变质物品库存模型.Dye 等[9]研究了有限时域内的不等周期库存模型.

本文在前人研究成果的基础上,考虑需求率指数上升随后恒定的易变质物品库存模型,寻求易变质物品的最优库存补充策略.

1 数学模型

斜坡型需求且短缺量部分拖后订购的易变质物

收稿日期:2009-04-08
修回日期:2009-04-28
作者简介:黄远良(1982-),男,硕士研究生,主要从事物流与供应链管理研究。
*国家自然科学基金资助项目(60864002)资助。

品库存数学模型基于如下假设:(1)补货率无限大,即补货是即时进行的;(2)物品进入库存后才发生变质,库存物品的变质率由 Weibull 分布给定,变质率 $\theta(t)=\alpha\beta t^{\beta-1}(\alpha>0,\beta\geqslant 1)$;(3)$t$ 时刻的需求率是 $f(t)=A\exp\{b[t-(t-u)H(t-u)]\}$,其中 $A>0,b>0,H(t-u)$ 是 Heaviside 函数,$H(t-u)=\begin{cases}1,t\geqslant u\\0,t<u\end{cases}$;(4) 允许短缺且短缺量部分拖后,假设需求量拖后率 $D(t)$ 取决于排队等待的队伍中总的顾客数目,即 $D(t)=f(t)+\delta I(t)$,其中 $I(t)<0$,δ 是非负数;当 $\delta=0$ 时,需求量完全拖后.

符号说明:T 为固定的订货周期长度;$I(t)$ 为 t 时刻的库存水平,$0\leqslant t\leqslant T$;t_1 为库存水平降至零的时间;c_1 为单位时间单位物品的库存持有成本;c_2 为单位时间单位物品的短缺成本;c_3 为由于丢单引起的单位物品机会成本;c_4 为单位物品的变质成本;u 为需求函数参数;S 为最大库存水平;K 为每次订货的固定订购成本;Q 为每次订货的订购量.

库存模型在 $t=0$ 时刻进行补货而达到最大库存水平 S,然后由于物品自身的变质和市场对物品的需求,库存水平在 t_1 时刻降至零,在时间段 $[t_1,T]$ 内短缺发生且短缺量部分拖后订购. 库存水平的变化用以下方程描述:

$$\frac{dI(t)}{dt}=-\alpha\beta t^{\beta-1}I(t)-f(t),0\leqslant t\leqslant t_1;\quad(1)$$

$$\frac{dI(t)}{dt}=-\delta I(t)-f(t),t_1\leqslant t<T;\quad(2)$$

边界条件为 $I(t_1)=0$.

2 模型分析

我们基于库存数学模型中 t_1 和 u 的值考虑两种可能的情形.

情形 1 $0<t_1\leqslant u$.

如图 1 所示,这时库存水平在时间段 $[0,T]$ 内的变化情况可用微分方程描述为:

$$\frac{dI(t)}{dt}=-\alpha\beta t^{\beta-1}I(t)-Ae^{bt},0\leqslant t\leqslant t_1;\quad(3)$$

$$\frac{dI(t)}{dt}=-\delta I(t)-Ae^{bt},t_1\leqslant t\leqslant u;\quad(4)$$

$$\frac{dI(t)}{dt}=-\delta I(t)-Ae^{bu},u\leqslant t<T;\quad(5)$$

边界条件为 $I(t_1)=0$.

方程(3) ~ (5) 的解分别为

$$I(t)=Ae^{-\alpha t^\beta}\int_t^{t_1}e^{bx+\alpha x^\beta}dx,0\leqslant t\leqslant t_1;\quad(6)$$

$$I(t)=-\frac{A}{b+\delta}(e^{bt}-e^{(b+\delta)t_1-\delta t}),t_1\leqslant t\leqslant u;\quad(7)$$

$$I(t)=-\frac{A}{b+\delta}(e^{(b+\delta)u}-e^{(b+\delta)t_1})e^{-\delta t}+\frac{Ae^{bu}}{\delta}(e^{\delta(u-t)}-1),u\leqslant t<T.\quad(8)$$

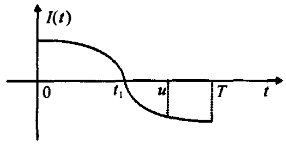

图 1 订购库存模型($0<t_1\leqslant u$)

库存模型在初始时刻 $t=0$ 进行补货,得到最大库存水平

$$S=A\int_0^{t_1}e^{bx+\alpha x^\beta}dx;\quad(9)$$

在时间段 $[0,t_1]$ 内总的变质物品数量为

$$D=S-\int_0^{t_1}f(t)dt=A\int_t^{t_1}e^{bx+\alpha x^\beta}dx-\frac{A}{b}(e^{bt_1}-1);\quad(10)$$

在时间段 $[0,t_1]$ 内库存持有量为

$$H=A\int_0^{t_1}\int_t^{t_1}e^{bx+\alpha x^\beta-\alpha t^\beta}dxdt;\quad(11)$$

在时间段 $[t_1,T]$ 内库存短缺累积拖后量为

$$B=\int_{t_1}^T[-I(t)]dt=\frac{A}{b+\delta}(\frac{e^{bu}-e^{bt_1}}{b}-\frac{e^{bt_1}-e^{(b+\delta)t_1-\delta u}}{\delta})-\frac{Ae^{bu}}{\delta^2}(1-\delta(T-u)-e^{\delta(u-T)})+\frac{A}{\delta(b+\delta)}(e^{(b+\delta)u}-e^{(b+\delta)t_1})(e^{-\delta u}-e^{-\delta T});\quad(12)$$

在时间段 $[t_1,T]$ 内销售损失的数量为

$$L=\frac{\delta A}{b+\delta}(\frac{e^{bu}-e^{bt_1}}{b}-\frac{e^{bt_1}-e^{(b+\delta)t_1-\delta u}}{\delta})-\frac{Ae^{bu}}{\delta}(1-\delta(T-u)-e^{\delta(u-T)})+\frac{A}{b+\delta}(e^{(b+\delta)u}-e^{(b+\delta)t_1})(e^{-\delta u}-e^{-\delta T}).\quad(13)$$

总的库存成本包括固定订购成本、库存持有成本、库存短缺累积拖后成本、变质成本和机会成本. 因此在情形 $0<t_1\leqslant u$ 下,单位时间的库存成本为

$$C_1(t_1)=\frac{1}{T}[K+c_1H+c_2B+c_3L+c_4D],\quad(14)$$

(14) 式中 $C_1(t_1)$ 关于 t_1 的一阶导数为

$$\frac{dC_1(t_1)}{dt_1}=\frac{Ae^{bt_1}}{T}[c_1\int_0^{t_1}e^{\alpha t_1^\beta-\alpha t^\beta}dt-(\frac{c_2}{\delta}+c_3)(1-e^{\delta(t_1-T)})+c_4(e^{\alpha t_1^\beta}-1)],\quad(15)$$

使 $C_1(t_1)$ 最小的必要条件为 $\frac{dc_1(t_1)}{dt_1}=0$.

我们令

$$h(t_1)=c_1\int_0^{t_1}e^{\alpha t_1^\beta-\alpha t^\beta}dt-(\frac{c_2}{\delta}+c_3)(1-e^{\delta(t_1-T)})+c_4(e^{\alpha t_1^\beta}-1),$$

由 $h(0)=-(\frac{c_2}{\delta}+c_3)(1-e^{-\delta T})<0, h(T)=c_1\int_0^T e^{\alpha t_1^\beta-\alpha t^\beta}\mathrm{d}t+c_4(e^{\alpha T^\beta}-1)>0$ 和 $\frac{\mathrm{d}h(t_1)}{\mathrm{d}t_1}>0$，知 $h(t_1)$ 在$[0,T]$上严格递增，且存在唯一一点 $t_1^*(\in[0,T])$ 使得 $h(t_1^*)=0$. 又 $\frac{\mathrm{d}^2C_1(t_1)}{\mathrm{d}t_1^2}|_{t_1=t_1^*}=\frac{Ae^{bt_1}}{T}\frac{\mathrm{d}h(t_1)}{\mathrm{d}t_1}|_{t_1=t_1^*}>0$，故 $C_1(t_1)$ 在$[0,T]$上存在最小值.

若 t_1^* 满足 $t_1^*\leqslant u$，则最优的拖后需求量

$$\Delta=\frac{A}{b+\delta}(e^{(b+\delta)u}-e^{(b+\delta)t_1^*})e^{-\delta T}-\frac{Ae^{bu}}{\delta}(e^{\delta(u-T)}-1);$$

最优订购量为

$$Q^*=\frac{A}{b+\delta}(e^{(b+\delta)u}-e^{(b+\delta)t_1^*})e^{-\delta T}-\frac{Ae^{bu}}{\delta}(e^{\delta(u-T)}-1)+A\int_0^{t_1^*}e^{bx+\alpha x^\beta}\mathrm{d}x.$$

性质 1 在 $0<t_1\leqslant u$ 情形下，若 $t_1^*\leqslant u$，则 $C_1(t_1)$ 在 $t_1=t_1^*$ 处取得最小值，且 t_1^* 是最小值点；若 $t_1^*\geqslant u$，则 $C_1(t_1)$ 在 $t_1^*=u$ 处取得最小值，其中 $h(t_1^*)=0$.

情形 2 $u\leqslant t_1<T$.

如图 2 所示，这时库存水平的变化可用方程描述为：

$$\frac{\mathrm{d}I(t)}{\mathrm{d}t}=-\alpha\beta t^{\beta-1}I(t)-Ae^{bt}, 0\leqslant t\leqslant u; \quad (16)$$

$$\frac{\mathrm{d}I(t)}{\mathrm{d}t}=-\alpha\beta t^{\beta-1}I(t)-Ae^{bu}, u\leqslant t\leqslant t_1; \quad (17)$$

$$\frac{\mathrm{d}I(t)}{\mathrm{d}t}=-\delta I(t)-Ae^{bu}, t_1\leqslant t<T; \quad (18)$$

边界条件为 $I(t_1)=0$.

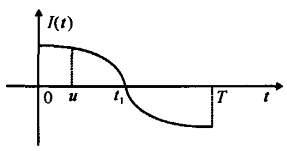

图 2 订购库存模型($u\leqslant t_1<T$)

方程(16)～(18)的解分别为

$$I(t)=Ae^{-\alpha t^\beta}\int_t^u e^{bx+\alpha x^\beta}\mathrm{d}x+Ae^{bu-\alpha t^\beta}\int_u^{t_1}e^{\alpha x^\beta}\mathrm{d}x, 0\leqslant t\leqslant u; \quad (19)$$

$$I(t)=Ae^{bu-\alpha t^\beta}\int_t^{t_1}e^{\alpha x^\beta}\mathrm{d}x, u\leqslant t\leqslant t_1; \quad (20)$$

$$I(t)=-\frac{Ae^{bu}}{\delta}[1-e^{\delta(t_1-t)}], t_1\leqslant t<T. \quad (21)$$

如同情形 1 的分析，得到 $u\leqslant t_1<T$ 情形下单位时间的库存成本为

$$C_2(t_1)=\frac{1}{T}\{K+c_1A\int_0^u\int_t^u e^{bx+\alpha x^\beta-\alpha t^\beta}\mathrm{d}x\mathrm{d}t+c_1A\int_0^u\int_u^{t_1}e^{bu+\alpha x^\beta-\alpha t^\beta}\mathrm{d}x\mathrm{d}t+c_1A\int_u^{t_1}\int_t^{t_1}e^{bu+\alpha x^\beta-\alpha t^\beta}\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\frac{Ae^{bu}}{\delta}(\frac{c_2}{\delta}+c_3)[e^{\delta(t_1-T)}+\delta(T-t_1)-1]+c_4A\int_0^u e^{bx+\alpha x^\beta}\mathrm{d}x+c_4Ae^{bu}\int_u^{t_1}e^{\alpha x^\beta}\mathrm{d}x-\frac{c_4A}{b}(e^{bu}-1)-c_4Ae^{bu}(t_1-u)\}, \quad (22)$$

使得 $C_2(t_1)$ 最小的必要条件为

$$\frac{\mathrm{d}C_2(t_1)}{\mathrm{d}t_1}=\frac{Ae^{bu}}{T}[c_1\int_0^{t_1}e^{\alpha t_1^\beta-\alpha t^\beta}\mathrm{d}t+(\frac{c_2}{\delta}+c_3)(e^{\delta(t_1-T)}-1)+c_4(e^{\alpha t_1^\beta}-1)]=0. \quad (23)$$

又 $C_2(t_1)$ 关于 t_1 的二阶导数为

$$\frac{\mathrm{d}^2C_2(t_1)}{\mathrm{d}t_1^2}=\frac{Ae^{bu}}{T}[c_1+c_1\alpha\beta t_1^{\beta-1}\int_0^{t_1}e^{\alpha t_1^\beta-\alpha t^\beta}\mathrm{d}t+(c_2+\delta c_3)e^{\delta(t_1-T)}+c_4\alpha\beta t_1^{\beta-1}e^{\alpha t_1^\beta}]>0. \quad (24)$$

故在 $u\leqslant t_1<T$ 情形下，$C_2(t_1)$ 存在最小值. 若(23)式的解 t_1^* 满足 $u\leqslant t_1^*<T$，则最优的拖后需求量为

$$\Delta=\frac{Ae^{bu}}{\delta}[1-e^{\delta(t_1^*-T)}];$$

最优订购量为

$$Q^*=A\int_0^u e^{bx+\alpha x^\beta}\mathrm{d}x+A\int_u^{t_1^*}e^{bu+\alpha x^\beta}\mathrm{d}x+\frac{Ae^{bu}}{\delta}[1-e^{\delta(t_1^*-T)}].$$

性质 2 在情形 $u\leqslant t_1<T$ 下，若 $u\leqslant t_1^*<T$，则 $C_2(t_1)$ 在 $t_1=t_1^*$ 处取得最小值，且 t_1^* 是最小值点；若 $t_1^*\leqslant u$，则 $C_2(t_1)$ 在 $t_1^*=u$ 处取得最小值，其中 $h(t_1^*)=0$.

令

$$C(t_1)=\begin{cases}C_1(t_1), 若\ t_1\leqslant u;\\ C_2(t_1), 若\ t_1>u;\end{cases} \quad (25)$$

由(14)式、(22)式和(15)式、(23)式知 $C(t_1)$ 在 u 处连续、可微.

综合以上分析，$C(t_1)$ 在$[0,T]$上只存在一个极小值点，从而是最小值点.

3 数值算例

我们用两个数值算例来验证本文提出的模型.

例 1 假设模型的参数如下：$K=150$(元/次)，$A=100, b=0.1, T=10$(周)，$u=6$(周)，$\delta=0.05, \theta(t)=\alpha\beta t^{\beta-1}=0.1\times2\times t^{2-1}=0.2t, c_1=1$(元/单位/周)，$c_2=10$(元/单位/周)，$c_3=20$(元/单位)，$c_4=3$(元/单位). 通过计算可以得到库存水平降至零的最优时间 $t_1^*=4.7384$ 周，最优拖后需求量 $\Delta=832.0587$ 单位，最优订购量 $Q^*=2626.0212$ 单位，最优单位时间库存成本 $C(t_1^*)=3264.5251$ 元. 我们在上述条件下就需求量拖后率

表 1 δ、u、b 对 Δ、Q^*、$C(t_1^*)$的灵敏度分析

变量	δ			u			b		
	0.01	0.05	0.1	6.2	6.4	6.6	0.2	0.4	0.6
t_1^*	4.7607	4.7384	4.7076	4.7384	4.7384	4.7384	4.7384	4.7384	4.7384
Δ	917.2865	832.0587	739.8189	845.1001	857.7838	870.0837	1497.7883	4865.0928	15847.8614
Q^*	2745.4307	2626.0212	2487.7880	2639.0626	2651.7463	2664.0462	3291.7509	6659.0553	17641.8239
$C(t_1^*)$	3244.7939	3264.5251	3278.3971	3293.4110	3320.0215	3344.3932	5555.1358	16499.2461	50257.9295

表 2 δ、u、b 对 Δ、Q^*、$C(t_1^*)$的灵敏度分析

变量	δ			u			b		
	0.05	0.10	0.15	5.2	5.4	5.6	0.2	0.4	0.6
t_1^*	6.0610	6.0535	6.0413	6.0535	6.0535	6.0535	6.0535	6.0535	6.0535
Δ	589.4782	537.6205	490.3777	548.4812	559.5612	570.8651	886.3864	2409.4480	6549.5588
Q^*	2531.4915	2471.9028	2432.3911	2498.0230	2522.0405	2543.5593	3793.3659	9267.0458	23411.7949
$C(t_1^*)$	2264.4167	2297.1499	2323.9130	2333.7630	2369.5922	2404.3790	3698.6052	9707.3736	25749.5276

参数δ、需求率参数u和b分别对最优拖后需求量Δ、最优订购量Q^*和最优单位时间库存成本$C(t_1^*)$作灵敏度分析，结果如表1所示.

例 2 假设模型的参数如下：$K = 200$(元/次)，$A = 10$，$b = 0.1$，$T = 10$(周)，$u = 5$(周)，$\delta = 0.1$，$\theta(t) = \alpha\beta t^{\beta-1} = 0.05 \times 2 \times t^{2-1} = 0.1t$，$c_1 = 1$(元/单位/周)，$c_2 = 10$(元/单位/周)，$c_3 = 20$(元/单位)，$c_4 = 3$(元/单位). 通过计算可以得到库存水平降至零的最优时间$t_1^* = 6.0535$周，最优拖后需求量$\Delta = 537.6205$单位，最优订购量$Q^* = 2471.9028$单位，和最优单位时间库存成本$C(t_1^*) = 2297.1499$元. 我们在上述条件下就需求量拖后率参数δ、需求率参数u和b分别对最优拖后需求量Δ、最优订购量Q^*和最优单位时间库存成本$C(t_1^*)$作灵敏度分析，结果如表2所示.

从表1和表2的结果可以看出：(1)拖后率参数δ的增加会引起库存水平降至零的最优时间t_1^*、最优拖后需求量Δ、最优订购量Q^*的减少和最优单位时间库存成本$C(t_1^*)$的上升. (2)需求函数参数u的增加引起最优拖后需求量Δ、最优订购量Q^*、最优单位时间库存成本$C(t_1^*)$的上升. (3)需求函数参数b的微小增加引起最优拖后需求量Δ、最优订购量Q^*、最优单位时间库存成本$C(t_1^*)$的迅速上升. (4)需求函数参数u、b的变动对库存水平降至零的最优时间t_1^*没有影响.

第(1)种情况在实际中是显然易见的. 需求率参数u与b增加会引起需求率增大，因而第(2)、(3)种情况在实际中也是可见的. 至于第(4)种情况，当需求率增大时，订购量也增大，为了得到最优的单位时间库存成本，出现短缺的时间不变在实际中也是可以见到的.

4 结束语

本文研究指数斜坡型需求模式下变质率为Weibull分布形式的易变质物品库存管理问题，分析了允许短缺下两种可能情形的单位时间库存成本函数. 算例表明，库存模型参数δ、u、b对Δ、Q^*、$C(t_1^*)$均有不同程度的影响，因此在制定库存补充策略时必须加以考虑. 对于进一步研究，我们还可以考虑模糊通货膨胀和资金时间价值情形、边生产边需求、允许延迟支付和含次品的订购批量等情况.

参考文献：

[1] Ghare P M, Schrader G H. A model for exponentially decaying inventory system[J]. International Journal of Production Research, 1963, 14(4): 238-243.

[2] Covert R B, Philip G S. An EOQ model with Weibull distribution deterioration[J]. AIIE Transactions, 1973, 5(6): 323-326.

[3] Hill R M. Inventory model for increasing demand followed by level demand[J]. Journal of the Operational Research Society, 1995, 46: 1250-1259.

[4] Deng P S, Robert H J L, Chu P. A note on the inventory models for deteriorating items with ramp type demand rate[J]. European Journal of Operational Research, 2007, 178: 112-120.

[5] Panda S, Senapati S, Basu M. Optimal replenishment policy for perishable seasonal products in a season with ramp-type time dependent demand[J]. Computers & Industrial Engineering, 2008, 54: 301-314.

[6] Cheng M B, Wang G Q. A note on the inventory model for deteriorating items with trapezoidal type demand rate[J]. Computers & Industrial Engineering, 2009, 56 (4): 1296-1300.

[7] Padmanabhan G, Vart P. EOQ models for perishable items under stock dependent selling rate[J]. European Journal of Operational Research, 1995, 86(2): 281-292.

[8] Ouyang L Y, Heish T P, Dye C Y. An inventory model for deteriorating items with stock dependent demand under the conditions of inflation and time value of money[J]. Engineering Economist, 2003, 48(1): 52-68.

[9] Dye C Y, Chang H J, Teng J T. A deteriorating inventory model with time-varying demand and shortage-dependent partial backlogging [J]. European Journal of Operational Research, 2006, 172 (2): 417-429.

(责任编辑:韦廷宗)

(上接第 158 页)

因为

$$P_n(x) = R_n(\frac{1-x}{2}, \frac{1+x}{2}) = \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]}(-1)^k \frac{(2n-2k)!x^{n-2k}}{2^n k!(n-k)!(n-2k)!}.$$

根据前面所用的方法，不难得到 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{(n!)^2}H_n(x,y)R_n(z,w) = \exp(y \frac{\partial^2}{\partial x^2})C_0(-wxt)C_0(zxt)$. 令 $x=2x, y=-1, z=\frac{1-y}{2}, w=\frac{1+y}{2}$，可得以下关于 $H_n(x)$ 和 $P_n(x)$ 的一个双边生成函数：$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{(n!)^2}H_n(x)P_n(y) = \exp(-\frac{1}{4}\frac{\partial^2}{\partial x^2})C_0(-(1+y)xt)C_0((1-y)xt)$.

参考文献:

[1] Dattoli G, Lorenzutta S, Mancho A M Torre A, Generalized polynomials and associated operational identities [J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 1999, 108: 209-218.

[2] Dattoli G. Bilateral generating functions and operational methods[J]. J Math Anal Appl, 2002, 269: 716-725.

[3] Dattoli G, Torre A. Exponential operators, quasi-monomials and generalized polynomials [J]. Radiation Physics and Chemistry, 2000, 57: 21-26.

[4] Dattoli G, Torre A, Mancho A M. The generalized Laguerre polynomials, the associated Bessel functions and application to propagation problems [J]. Radiation Physics and Chemistry, 2000, 59: 229-237.

[5] Youssef Ben Cheikh. Some results on quasimonomiality [J]. Applied Mathematics and Computation, 2003, 141: 63-76.

(责任编辑:尹　闯)