广西科学院学报 2009,25(2):81~82
Journal of Guangxi Academy of Sciences Vol. 25, No. 2 May 2009

与 Sidon 序列有关的一个组合数学问题初探*

Tentative Study a Combinatorial Problem Related to Sidon Sequences

陈 红[1],梁文忠[1],黎贞崇[2],罗海鹏[2]
CHEN Hong[1], LIANG Wen-zhong[1], LI Zhen-chong[2], LUO Hai-peng[2]

(1. 梧州学院,广西梧州 543002;2. 广西科学院,广西南宁 530007)
(1. Wuzhou University, Wuzhou, Guangxi, 543002, China; 2. Guangxi Academy of Sciences, Nanning, Guangxi, 530007, China)

摘要:给出与 Sidon 序列有关的一个组合数学问题的求解算法,并根据该算法得出该组合问题在[4,16]内的准确值.

关键词:组合数学 Sidon 序列 算法
中图法分类号:O157.5 **文献标识码**:A **文章编号**:1002-7378(2009)02-0081-02

Abstract: This paper studies the solution algorithm for a difficult combinatorial problem related to Sidon sequence. According to the solution algorithm, the accurate value of this problem in [4, 16] is obtained.

Key words: combinatorial mathematics, Sidon sequence, algorithm

在组合数学中,有一类问题具有这样的特点:证明了某种函数的存在性之后,要确定这函数的准确值非常困难,例如经典 Ramsey 数问题[1].本文初探一个与 Sidon 序列有关的组合数学问题.

1 一个组合数学问题

1992 年,葛军[2]提出问题:一堆书放入 n 个抽屉(允许有空抽屉),为了使任意两个抽屉里书的数目之差不同,问至少要有多少本书.1993 年,杨之[3]在综述性著作《问题或猜想》中把这道题列为第 168 题,并且简称 whc168.以下记 whc168 的解答为 $g(n)$.

实际上,要研究这个问题,首先必须证明 $g(n)$ 的存在性.由于这并非不证自明的,因此我们补充证明如下:

当 $n=1$ 时,由 1 个空抽屉即得 $g(1)\leqslant 0$.显然,$g(1)=0$.

当 $n=2$ 时,两个抽屉分别放置 0,1 本书,即得 $g(2)\leqslant 1$,显然 $g(2)=1$.

当 $n=3$ 时,3 个抽屉分别放置 0,1,3 本书,即得 $g(3)\leqslant 4$.易知对于异于 0,1,3 的并且符合要求的其他放置方法都有 $g(3)\geqslant 4$,故有 $g(3)=4$.

当 $n\geqslant 4$ 时,考虑一个简单的放置方法:n 个抽屉分别放置 $2,2^2,2^3,\cdots,2^n$ 本书.我们断言,任意两个抽屉里书的数目之差不同.假设这个断言不真,则有 4 个抽屉里书的数目之差相同,即 $2^a-2^b=2^c-2^d$,其中 $a>c>b>d\geqslant 1$,则有 $2^{a-d}-2^{b-d}=2^{c-d}-1$,导致偶数等于奇数,矛盾.

上述放置方法由于未曾考虑"允许空抽屉",因此肯定不是最好的方法,故有上界:

$$g(n)\leqslant 2+2^2+2^3+\cdots+2^n=2^{n+1}-2.$$

考虑到优于上述结论的放置方法只有有限个,这些方法所需要的书的数目只需要取总和不大于 $2^{n+1}-2$ 的有限个数值,其总和的最小值就是 $g(n)$.这就证明 whc168 的解答是存在的.

虽然函数 $g(n)$ 的存在性不难证明,但对于给定的 $n\geqslant 4$,要确定 $g(n)$ 的准确值就非常困难.近 10 年来,学术界尚未见有文献报道过这个问题的研究进展.

实际上,whc168 与组合数学中著名的 Sidon 序列问题有关.所谓 Sidon 序列[4~5],是指具有性质:$a_1<a_2<\cdots\cdots$,其中任意两项的和 $a_i+a_j(i\leqslant j)$ 各不

收稿日期:2008-04-25
作者简介:陈 红(1962-),女,硕士,副教授,主要从事图论与组合数学研究。
*国家自然科学基金项目(60563008)、广西自然科学基金项目(桂科自 0728051)和梧州学院科研项目(2007B007)资助。

相同的一列整数. 1932年,Simon Sidon[4]在研究傅里叶级数时,提出了该问题. 此问题也引起了 Erdös 的关注. 此后数10年来,学术界关于这个问题的研究进展非常缓慢. 近年来由于计算机科学的快速发展,Sidon 序列问题又重新引起学术界的兴趣,动态综述文献[5]收录了有关成果. 但这些成果主要是研究对于给定的正整数 n, 寻找 Sidon 序列 $a_1 < a_2 < \cdots\cdots < a_n$,使 $a_n - a_1$ 达到最小值.

注意到,由 $a+b=c+d$ 即得 $a-d=c-b$,因此,whc168 实际上是要寻找在所有 n 元 Sidon 序列中,使 $a_1+a_2+\cdots+a_n$ 达到最小值的那些序列,从而确定函数 $g(n)$ 的准确值. 虽然 whc168 与 Sidon 问题稍有不同,但两者都以 Sidon 序列为基础,并且都具有深刻的组合数学背景,因此它们都是极其困难的问题.

2 求解 $g(n)$ 的一种算法

显然,$g(n)$ 问题必须考虑允许有空抽屉. 设 n 个抽屉分别放置 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 本书,其中 $a_1=0<a_2<\cdots<a_n$. 如果任意两个抽屉里书的数目之差不同,我们就称 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是好数列,实际上它与 Sidon 序列有关.

算法 1

步骤1:给定 $n\geqslant 4, a_1=0, a_2=1, i=2, k=1, M=2^{n+1}-2$.

步骤2:令 $a_{i+1}=a_i+k$,如果:$a_1,a_2,\cdots,a_i$ 不是好数列,令 $k=k+1$,转到步骤2.

步骤3:如果 $S=a_1+a_2+\cdots+a_i\geqslant M$,转到步骤6.

步骤4:令 $i=i+1$. 如果 $i<n$,令 $k=1$,转到步骤2.

步骤5:如果 $S<M$,令 $M=S$,打印 M 与数列 $a_1,a_2,\cdots,a_n$.

步骤6:令 $i=i-1$,如果 $i\geqslant 2$,令 $a_i=a_i+1$, $k=1$,转到步骤2.

步骤7:令 $g(n)=M$,运算结束.

在算法1中,由步骤1赋予初始数值,由步骤2～步骤6并根据字典排列法依次生成好数列. 在步骤5中满足条件 $S<M$ 的好数列称为优秀数列,其中最后打印出来的优秀数列称为最佳数列.

例 1 给定 $n=4$,则由步骤5打印第1个优秀数列是 0,1,3,7. 以后再也没有优秀数列,故有 $g(4)=11$.

实际上,由好数列 0,1,4,6 也可以实现 $g(4)=11$,但这个好数列排序在 0,1,3,7 之后,此时已有 $M=11$,因而后者未能在步骤5中满足条件 $S<M$,失去了成为优秀数列的机会. 由此可见,实现 $g(n)$ 的最佳数列并非唯一.

例 2 给定 $n=5$,则由步骤5打印第1个优秀数列是 0,1,3,7,12. 以后再也没有优秀数列,故有 $g(5)=23$.

例 3 给定 $n=6$,则由步骤5打印第1个优秀数列是 0,1,3,7,12,20,此时 $S=43$. 第2个优秀数列是 0,1,3,8,12,18,此时 $S=42$. 以后再也没有优秀数列,故有 $g(6)=42$.

3 主要结果

定理 1 $g(4)=11, g(5)=23, g(6)=42, g(7)=73, g(8)=113, g(9)=171, g(10)=245, g(11)=335, g(12)=440, g(13)=582, g(14)=753, g(15)=947, g(16)=1180$.

根据算法1,$g(n)$ 的计算所得结果如表1所示.

表 1 $4\leqslant n\leqslant 16$ 时 $g(n)$ 的准确值及最佳数列

n	$g(n)$	最佳数列
4	11	0,1,3,7
5	23	0,1,3,7,12
6	42	0,1,3,8,12,18
7	73	0,1,3,7,12,20,30
8	113	0,1,3,8,14,18,30,39
9	171	0,1,3,8,14,18,30,39,58
10	245	0,1,3,11,15,20,36,43,49,67
11	335	0,1,3,10,16,21,35,43,47,71,88
12	440	0,1,4,6,18,26,33,42,61,72,82,95
13	582	0,2,8,9,13,29,32,47,57,69,83,100,133
14	753	0,2,5,6,17,25,35,49,71,80,87,108,121,147
15	947	0,1,3,7,17,25,36,48,63,76,97,102,134,154,184
16	1180	0,1,3,8,12,28,38,51,57,72,104,118,135,159,177,217

由表1即可以得到定理1. 我们在 CPU 为 AMD3600+的电脑上完成表1运算所需要的时间约为 20h.

参考文献:

[1] Graham R L,Rothschild B L,Spencer J H. Ramsey theory[M]. New York:John Wiley & Sons,1990.

[2] 葛军. 数学问题征解[J]. 数学通讯,1992(7):39.

[3] 杨之. 初等数学研究的问题与课题[M]. 长沙:湖南教育出版社,1993.

[4] Sidon S. Ein Satz iiber trigonomietrische Polynome und seine Anwendungen in der theorie der Fourier-Reihen [J]. Math Annalen,1932,106:536-539.

[5] O'Bryant K. A complete annotated bibliography of work related to Sidon sequences[J]. Electronic Journal of Combinatorics Dynamic Survey, 2004 (11): 1-39. http://www.combinatorics.org/Surveys/ds11.pdf.

(责任编辑:尹 闯)