几类图的树宽
The Tree-Width of Some Graphs

韦 新[1],邓天炎[2],罗海鹏[3]
WEI Xin[1], DENG Tian-yan[2],LUO Hai-peng[3]

(1.广西师范学院师园学院,广西南宁 530023;2.广西师范学院数学与计算机科学系,广西南宁 530023;3.广西科学院,广西南宁 530007)
(1. College of Shiyuan,Guangxi Teachers Education University,Nanning,Guangxi, 530023, China; 2. Department of mathmatics and Computer Science, Guangxi Teachers Education University, Nanning, Guangxi, 530023, China; 3. Guangxi Academy of Sciences, Nanning, Guangxi, 530007,China)

摘要:利用图的树宽分解定理,得到圈 C_n 的 r-冠图 $I_r(C_n)$、方型网图 $F(m;n)(m=1,2,3)$、蛛网图 $W(m,n)$ 和图 $P_m \otimes P_n$ 的树宽.

关键词:图 树宽 分解定理
中图法分类号:O157.5 **文献标识码**:A **文章编号**:1002-7378(2009)01-0017-02

Abstract: By using the decomposition theorems of tree-width, the tree-width of the r-corona graph of the cycle C_n, mesh Graph $F(m;n)(m=1,2,3)$,Cobweb-chart $W(m,n)$ and $P_m \otimes P_n$ has obtained.

Key words: graphs,tree-width,decomposition theorem

图的树宽是 Robertson 和 Seymour 在建立图的 minor 理论时提出的概念[1]. 1987 年 S. Arnborg,D. Corneil 和 A. Proskurowski 证明了树宽问题的 NP-完全性. 关于特殊图的树宽,已经有不少的结果,但是与图的标号问题相比,结果还不多. 对于一些已知结构的图可以利用分解、约化定理来确定其树宽. 本文利用图的树宽分解定理得到几类图的树宽.

1 预备知识

定义 1[2] 假设图 G 为一个简单连通图,$V(G)$ 与 $E(G)$ 分别表示图 G 的顶点集和边集,G 的一个树分解表示为 (T,X),其中 T 表示一棵树,$X=(X_i : i \in V(T))$ 为 $V(G)$ 的一个子集,且满足性质:(1) $\bigcup (X_i : i \in V(T)) = V(G)$;(2) 对于 $uv \in E(G)$,存在 $t \in V(T)$,使得 $\{u,v\} \subseteq X_t$;(3) 对于 $i,j,k \in V(T)$,如果 j 在 i 与 k 之间的唯一路上,使得 $X_i \cap X_{k'} \subseteq X_j$. G 的树分解 (T,X) 的宽度用 $TW(G;T,X)$ 来表示,即 $= TW(G;T,X) = \max\limits_{t \in V(T)} |X_t| - 1$. G 的树宽表示成 $TW(G) = \min\{TW(G;,T,X)$; (T,X) 为 G 的一个树分解$\}$.

定义 2 图 G 的 r-冠图指的是在 G 的每个顶点上都粘接 r 条悬挂边所组成的图. 圈的 r-冠图是在圈的每个顶点上增加 r 条悬挂边所组成的图,用 $I_r(C_n)$ 表示.

定义 3[3] 一阶网图 $F(1;n)$ 是指把 n 个圈 C_4 顺次串接所得到的图,其中 $F(1;n)$ 的任意 2 个串接点均不相邻,且 $F(1;n)$ 每个点的度均不超过 4.

定义 4[3] n 阶方型网图 $F(m;n)$ 是指把 n 个一阶网图 $F(1;n)$ 按二类点与一类点对应顺次串接所得到的图,二阶方型网图 $F(2;n)$ 如图 1 所示.

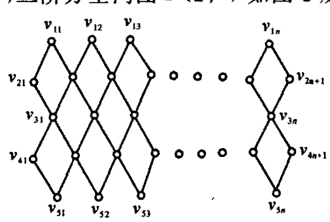

图 1 $F(2;n)$

定义 5 蛛网图 $W(m,n)$ 是指具有同心 x_0 的 m

收稿日期:2008-05-12
作者简介:韦 新(1982-),男,硕士,主要从事组合数学研究。

个圈 C_n，将 x_0 与每个 C_n 上相应点连线，然后在外层 C_n 的每点再增加一条悬挂边而得到的图(见图 2).

与确定一般图的带宽一样，确定图的树宽也是 NP-完全的，所以只能通过分析一些图的特殊结构与性质来求出这些图的树宽，而树宽分解定理提供了一种比较有效的方法，可以确定出某些特殊图的树宽.

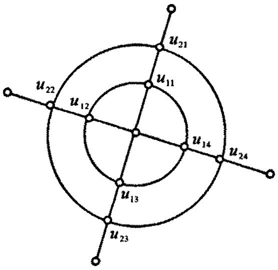

图 2　$W(m,n)$

引理 1[2]　设 G 的连通度为 k，S 为 G 的点割集，且 $|S|=k$，又设 $G[S]$ 的补图的每个分支为 K_1 或 $K_{1,r}$，$1\leq r\leq k-1$. 记 $G-S$ 的各分支的顶点集为 $V_1,V_2,\cdots,V_m$，又记 $H_i=G[V_i\cup S]+E(S)$，$1\leq i\leq m$，$E(S)=\{xy\in \bar{E}\mid x,y\in S\}$，则 $TW(G)=\max\limits_{1\leq i\leq m}\{TW(H_i)\}$.

引理 2[2]　若 S 为 G 的完全点割集，$G-S$ 的各分支顶点集为 $V_1,V_2,\cdots,V_k$，$k\geq 2$，记 $H_i=G[V_i\cup S]$，则 $TW(G)=\max\limits_{1\leq i\leq k}\{TW(H_i)\}$.

引理 3[4]　对于两个简单图 G 和 H，它们联图的树宽为 $TW(G+H)=\min\{TW(G)+|V(H)|, TW(H)+|V(G)|\}$.

文献[4]已经给出了 4 个关于图的树宽的结论：(1)$TW(C_n)=2$，(2)$TW(K_1+C_n)=3$，(3)$TW(K_n)=n-1$，(4) $TW(K_{m,n})=\min\{m,n\}$.

推论 1　令 $m=1$，可以得到星图 $K_{1,n}$ 与双星图 $S_{m,n}$ 的树宽满足 $TW(K_{1,n})=TW(S_{m,n})=1$.

2　主要结论

命题 1　圈的 r-冠图的树宽为 2.

证明　圈 C_n 上的每个点都构成一个完全点割集，应用引理 2，对 $I_r(C_n)$ 进行分解，可以得到 1 个 C_n，rn 个 K_2. 再由文献[4]中结论 $TW(C_n)=2$，得到 $TW(I_r(C_n))=2$.

命题 2　$TW(F(1;n))=2$.

证明　以 $F(1;n)$ 每一个串接点作为一个点割集，利用引理 2 把 $F(1;n)$ 分解，得到 n 个 C_4，所以 $TW(F(1;n))=TW(C_4)=2$.

命题 3　$TW(F(2;n))=3$.

证明　分别以 $(v_{2i},v_{4i})(2\leq i\leq n-1)$ 作为点割集. 显然，这些点割集的补图为一些 K_2. 根据引理 1，对 $F(2;n)$ 进行分解，依次得到 1 个 D_1，$n-2$ 个 D_2 和 1 个 D_1. 用同样的方法对 D_1、D_2 再进行分解，最终得到 $2(n-1)$ 个 K_3，4 个 C_4，$n-2$ 个 K_1+C_4. 再由引理 2 有 $TW(F(2;n))=TW(K_1+C_4)=3$.

命题 4　$TW(F(3;n))=\begin{cases}2, n=1,\\ 3, n=2.\end{cases}$

证明　当 $n=1$ 时，$F(3;1)$ 为 $F(1;n)$ 的特殊情况，显然有 $TW(F(3;1))=TW(F(1;3))=2$.

当 $n=2$ 时，根据命题 3 有 $TW(F(3;2))=TW(F(2;3))=3$.

命题 5　$TW(W(1,n))=3$.

证明　由图 $W(1,n)$ 容易得出，圈 C_n 上的每个顶点都构成一个完全点割集. 再利用引理 2 分解得到 n 条 K_2 和 1 个轮图 W_n，而又由于 $TW(W_n)=3$，所以 $TW(W(1,n))=3$.

定理 1　$TW(W(m,3))=3$.

证明　类似命题 5 的证明，分解得到 n 条 K_2，并且分解得到的图记为 D_1. 取第 1 个 C_3 上的 3 个顶点作为一个点割集，显然，这是一个完全点割集. 根据引理 2，对 D_1 进行分解，得到 1 个 K_1+C_3 和 1 个 D_2. 接着以第 2 个到第 $m-1$ 个 C_3 上的顶点依次作为点割集(这些都为完全点割集)，运用引理 2 对 D_2 逐步进行分解，最终得到 $m-1$ 个 $P_2\times C_3$. 由于 $TW(K_1+C_3)=3$，$TW(P_2\times C_3)=3$，所以 $TW(W(m,3))=\max\{TW(K_1+C_3), TW(P_2+C_3)\}=3$.

定理 2　$TW(W(m,4))=4$.

证明　类似定理 1，以第 1 个 C_4 到第 $m-1$ 个 C_4 上的顶点依次作为点割集. 由于 C_4 的补图为 2 个 K_2，故由引理 1，对 D_1 逐次分解，得到 1 个 K_1+K_4，$m-1$ 个 $P_2\times K_4$. 由于 $TW(K_1+K_4)=4$，$TW(P_2\times K_4)=3$，故 $TW(W(m,4))=4$.

定理 3　$TW(P_m\otimes P_n)=\begin{cases}3, m=2,\\ 4, m=3.\end{cases}$

证明　当 $m=2$ 时，顶点集 $\{V_{1,i},V_{2,i}\}(2\leq i\leq n-1)$ 是 $P_2\otimes P_n$ 的一个完全点割集. 应用引理 2，分解得到 $n-1$ 个完全图 K_4. 由于 $TW(K_4)=3$，故 $TW(P_2\otimes P_n)=4$.

(下转第 29 页)

方法内分析,而且每个 PDG 是独立的,因此能够并发构造,从而提高了程序分析的效率。

参考文献:

[1] Horwitz S, Thomas Reps, David Binkley. Interprocedural slicing using dependence graphs [J]. ACM Transactions on Programming Languages and System, 1990,12(1): 26-60.

[2] Larsen L, Harrold M. Slicing object-oriented software: proceedings of the Internation Conference on Software Engineering (ICSE-18) [C]. Berlin: IEEE Computer Society Press, 1996: 495-505.

[3] Zhao J. Applying program dependence analysis to java software: proceedings of Workshop on Software Engineering and Database Systems[C]. Taiwan: IEEE Computer Society Press, 1998: 162-169.

[4] Liang D, Harrold M J. Slicing objects using system dependence graphs: proceedings of the 1998 International Conference on Software Maintenance[C]. Bethesda: IEEE Computer Society Press, 1998: 358-367.

[5] Walkinshaw N, Roper M, Wood M. The Java system dependence graph: proceedings of the Third IEEE International Workshop on Source Code Analysis and Manipulation (SCAM'03)[C]. Washington: IEEE Computer Society Press, 2003:55-64.

[6] Chen Zhenqiang, Xu Baowen. Slicing object-oriented java programs[J]. ACM SIGPLAN Notices, 2001, 36 (4): 33-40.

[7] Frank Tip, Jens Palsberg. Scalable propagation-based call graph construction algorithms[J]. ACM SIGPLAN Notices, 2000,35(10): 281-293.

[8] Xu Baowen, Zhang Ting, Chen Zhenqiang. Dependence analysis of recursive subprograms and it's applications [J]. Chinese Journal of Computer, 2001,24(11):1278-1285.

(责任编辑:韦廷宗)

(上接第 18 页)

当 $m=3$ 时,$P_3 \otimes P_n$ 的连通度为 3,顶点集 $S_i = \{V_{1,i}, V_{2,i}, V_{3,i}\}(2 \leq i \leq n-1)$ 构成 $P_3 \otimes P_n$ 的点割集,并且 $|S_i| = 3$,$G[S_i]$ 的补图为分支 K_1 与 $K_{1,1}$. 利用引理1,分解得到 2 个 D_1,$n-3$ 个 D_2. 对于每个 D_1,分别以 $\{V_{1,2}, V_{2,1}, V_{2,2}\}$,$V_{1,n-1}$,$V_{2,n}$,$V_{2,n-1}$ 为完全点割集,分解得到 4 个 K_3 与 2 个 K_1+C_3. 对于 D_2,分别以 $S_i = \{v_{1,i}, v_{3,i+1}, v_{2,i}, v_{2,i+1}\}(2 \leq i \leq n-1)$ 为点割集. 由于的 $G[S_i]$ 的补图为分支 K_1 与 K_2,再利用引理1,对 D_2 分解得到 $2(n-3)$ 个 K_1+K_4,故 $TW(P_3 \otimes P_n) = \max\{TW(K_3), TW(K_1+C_3), TW(K_1+K_4)\} = TW(K_1+K_4) = 4$.

参考文献:

[1] Robertson N, Seymour P D. Graph minors Ⅰ;excluding a forest [J]. Comb Theory (B),1983,35:39-61.

[2] Lin Yixun. Decomposition theorems for the tree width of graphs[J]. Journal of Mathematic Study, 2000,33 (2):113-120.

[3] 卜长江,高振滨,齐玉梅. 网图 $F(m;n_1,n_2,\cdots,n_m)$的 K-优美性[J]. 哈尔滨工程大学学报,1995(3):102-105.

[4] 杨爱民,林诒勋. 图的 min-max 型最优消去顺序问题[J]. 系统科学与数学,1997,17(4):354-361.

(责任编辑:尹 闯)