广西科学院学报
Journal of Guangxi Academy of Sciences

2009,25(1):14～16
Vol. 25,No. 1 February 2009

几类边友好图*
Several E-cordial Graphs

郑学谦[1]，罗海鹏[2]，乔晓云[3]
ZHENG Xue-qian[1], LUO Hai-peng[2], QIAO Xiao-yun[3]

(1. 山西大学商务学院数学电子系，山西太原 030031；2. 广西科学院，广西南宁 530007；3. 广西师范学院数学与计算机科学系，广西南宁 530023)
(1. Mathematics and Electronics Department, Shanxi University Bussiness College, Taiyuan, Shanxi, 030031, China; 2. Guangxi Academy of Sciences, Nanning, Guangxi, 530007, China; 3. Department of Mathematics and Computer Science, Guangxi Teachers Education University, Nanning, Guangxi, 530023, China)

摘要：证明 n-荷兰风车和 $D_{n,4}$ 是边友好图，并且给出梯图 L_n 是边友好图的充要条件以及一阶网图 $F(1,n)$ 是边友好图的充分条件.

关键词：边友好图　n-荷兰风车　梯图 L_n　网图 $F(1,n)$
中图法分类号：O157.5　**文献标识码**：A　**文章编号**：1002-7378(2009)01-0014-03

Abstract: n- dutch windmills and $D_{n,4}$ are proved to be E-cordial graphs. The necessary and sufficient conditions of E-cordial graphs of ladder L_n and the sufficient condition of E-cordial graphs of net graph $F(1,n)$ is given.

Key words: E-cordial graphs, n-dutch windmills, ladder graph L_n, net graph $F(1,n)$

20 世纪 60 年代出现的图的标号问题已逐渐发展为组合数学中的一个热门课题，1997 年 Yilmaz 和 Cahit 在此基础上引进边友好图的概念，并且给出树，完全图，圈，正则图等是边友好图的充要条件[1]. 本文证明 n-荷兰风车，$D_{n,4}$ 是边友好图，并且给出梯图 L_n 是边友好图的充要条件以及一阶网图 $F(1,n)$ 是边友好图的充分条件.

1 基本概念

定义 1[2] 对于一个简单图 $G(V,E)$，存在映射 $f: E(G)\to\{0,1\}$，边导出映射 $f^*: V(G)\to\{0,1\}$，$\forall v\in V$，u 是与 v 相邻的顶点，$f^*(v)=\sum_{uv\in E} f(uv)(\mathrm{mod}2)$. 对于 $i\in\{0,1\}$，$m_i(f)=|\{e\in E(G): f(e)=i\}|$，$n_i(f)=|\{v\in V(G): f^*(v)=i\}|$，若有 $|m_0(f)-m_1(f)|\leqslant 1$，$|n_0(f)-n_1(f)|\leqslant 1$，则称 G 为边友好图，f 是边友好标号，f^* 是边导出的顶点标号.

定义 2[3] 如果把图 G_1 的某点 u 与图 G_2 的某点 v 重合，则称点 u,v 串接，G_1 与 G_2 串接. 设图 $F(1,n)$ 为 n 个圈 C_4 顺次串接所得，其中 $F(1,n)$ 的任意两个串接点均不相邻，且 $F(1,n)$ 的每个点的度均不超过 4，则称 $F(1,n)$ 为一阶网图，如图 1 所示.

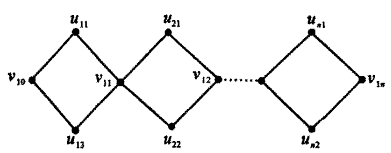

图 1　$F(1,n)$

定义 3[4] 设 G 和 H 是给定的两个图，乘积图 $G\times H$ 定义为 $V(G\times H)=\{(u,v)\mid u\in V(G),v\in V(H)\}$. (u,v) 与 (x,y) 在 $G\times H$ 中相邻 $\Leftrightarrow$ 当 $u=x$ 且 v,y 在 H 中相邻或 $v=y$ 且 u,x 在 G 中相邻. 例如，梯图 $p_n\times p_2$，如图 2 所示.

收稿日期：2008-10-12
作者简介：郑学谦(1979-)，男，助教，主要从事组合数学研究。
* 国家自然科学基金项目(60563008)和广西自然科学基金项目(桂科自 0728051)资助。

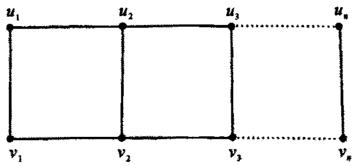

图 2 $P_n \times P_2$

定义 3[3] 设 u 是一个固定点,把 n 个长度为 m 的回路通过公共点 u 相连组成的图记作 $C_m^{(n)}$. 当 $m=3$ 时,$C_m^{(n)}$ 称为 n- 荷兰风车,如图 3 如示;当 $m=4$ 时 $C_4^{(n)}$ 称为 $D_{n,4}$,如图 4 所示.

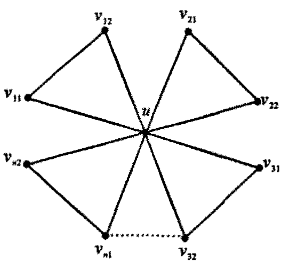

图 3 n-荷兰风车

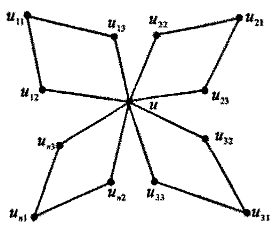

图 4 $D_{n,4}$

2 主要结论

定理 1 n- 荷兰风车是边友好图.

证明 n-荷兰风车的顶点和边的顺序如图3所示. 给出边标号:$f(uv_{i1}) = f(v_{i1}v_{i2}) = 1, i = 1,2,\cdots,\frac{n}{2}, f(uv_{i2}) = 0, i = 1,2,\cdots,\frac{n}{2}, f(uv_{i1}) = f(v_{i1}v_{i2}) = 0, i = \frac{n}{2}+1, \frac{n}{2}+2,\cdots,n, f(uv_{i2}) = 1, i = \frac{n}{2}+1, \frac{n}{2}+2,\cdots,n$. 容易看出,当 $n \equiv 0(\mathrm{mod}2)$ 时,$|m_0(f)| = |m_1(f)|$; 当 $n \equiv 1(\mathrm{mod}2)$ 时,$|m_0(f)| = |m_1(f)|+1$,故 $|m_0(f) - m_1(f)| \leqslant 1$.

$f^*(u) = \sum_{i=1}^{n}(f(uv_{i1}) + f(uv_{i2}))(\mathrm{mod}2) \equiv 1(\mathrm{mod}2), f^*(v_{i1}) = \sum_{j=1}^{n}(f(uv_{i1}) + f(v_{i1}v_{i2}))\cdot(\mathrm{mod}2) \equiv 0(\mathrm{mod}2), i = 1,2,\cdots,n, f^*(v_{i1}) = \sum_{j=1}^{n}(f(uv_{i2}) + f(v_{i1}v_{i2}))(\mathrm{mod}2) \equiv 0(\mathrm{mod}2), i = 1, 2,\cdots,n$. 故 $|n_0(f)| = |n_1(f)| - 1$,则有 $|n_0(f) - n_1(f)| \leqslant 1$. 综上所述,$n$- 荷兰风车是边友好图.

定理 2 $D_{n,4}$ 是边友好图.

证明 给出 $D_{n,4}$ 的边标号:当 i 取奇数时,$f(u_{i1}u_{i2}) = f(u_{i1}u_{i3}) = 1, i = 1,2,\cdots,n, f(uu_{i2}) = f(uu_{i3}) = 0, i = 1,2,\cdots,n$. 当 i 取偶数时,$f(u_{i1}u_{i2}) = f(uu_{i2}) = 1, i = 1,2,\cdots,n, f(u_{i1}u_{i3}) = f(uu_{i3}) = 0, i = 1,2,\cdots,n$. 同理可知 $D_{n,4}$ 是边友好图.

定理 3 梯图 L_n 是边友好图 $\Leftrightarrow n \equiv 0(\mathrm{mod}2)$.

证明 "$\Rightarrow$". 由于梯图是边友好图,故存在边友好标号 f 使得 $f^*(u_1) = f(u_1u_2) + f(u_1v_1)(\mathrm{mod}2), f^*(v_1) = (f(v_1v_2) + f(u_1v_1))(\mathrm{mod}2), f^*(u_i) = (f(u_{i-1}u_i) + f(u_iv_i) + f(u_iu_{i+1}))(\mathrm{mod}2), i = 2,\cdots,n-1, f^*(v_i) = (f(v_{i-1}v_i) + f(u_iv_i) + f(v_iv_{i+1}))(\mathrm{mod}2), i = 2,\cdots,n-1, f^*(u_n) = (f(u_{n-1}u_n) + f(u_nv_n))(\mathrm{mod}2), f^*(v_n) = (f(v_{n-1}v_n) + f(u_nv_n))(\mathrm{mod}2)$. 由同余可加性得

$$\sum_{i=1}^{n}(f^*(u_i) + f^*(v_i)) \equiv \{2\sum_{i=1}^{n}f(u_iv_i) + \sum_{i=1}^{n}(f^*(u_iu_{i+1}) + f^*(v_iv_{i+1}))\}(\mathrm{mod}2). \tag{1}$$

梯图的顶点数是 $2n$, 边数是 $3n-2$. 假设 $n \equiv 0(\mathrm{mod}2)$ 不成立,不妨令 $n = 2k+1$,所以顶点数为偶数,边数为奇数. 由边友好图的定义得 $|m_0(f) - m_1(f)| \leqslant 1, |n_0(f) - n_1(f)| \leqslant 1$. 因此(1)式左边为偶数,右边为奇数,故(1)式没有解,所以假设不成立.

"$\Leftarrow$". 当 $n \equiv 0(\mathrm{mod}2)$ 时,给出梯图的边标号:

$f(u_iu_{i+1}) = 1, i = 1,2,\cdots,n, f(v_iv_{i+1}) = 0, i = 1,2,\cdots,n$;

$$f(u_iv_i) = \begin{cases} 1, i \equiv 1(\mathrm{mod}2), i = 1,2,\cdots,n, \\ 0, i \equiv 0(\mathrm{mod}2), i = 1,2,\cdots,n. \end{cases}$$

由于 $n \equiv 0(\mathrm{mod}2)$,故 $|m_0(f)| = |m_1(f)|$,则有 $|m_0(f) - m_1(f)| \leqslant 1$.

$f^*(u_1) = f(u_1u_2) + f(u_1v_1) \equiv 0(\mathrm{mod}2), f^*(v_1) = f(v_1v_2) + f(u_1v_1) \equiv 1(\mathrm{mod}2), f^*(u_i) = f(u_{i-1}u_i) + f(u_iv_i) + f(u_iu_{i+1}) \equiv 0(\mathrm{mod}2), i = 3, 5,\cdots,n-1, f^*(u_i) = f(u_{i-1}u_i) + f(u_iv_i) + f(u_iu_{i+1}) \equiv 0(\mathrm{mod}2), i = 2,4,\cdots,n, f^*(v_n) = f(v_{n-1}v_n) + f(u_nv_n) \equiv 0(\mathrm{mod}2), f^*(u_n) = f(u_{n-1}u_n) + f(u_nv_n) \equiv 1(\mathrm{mod}2)$.

由于 $n \equiv 0(\mathrm{mod}2)$,所以 $|n_0(f)| = |n_1(f)|$,则有 $|n_0(f)| - |n_1(f)| \leqslant 1$. 由边友好标号的定义得,当 $n \equiv 0(\mathrm{mod}2)$ 时,梯图是边友好图. 综上所述,定

理 3 成立.

定理 4 当 $n\equiv 0(\mathrm{mod}2)$ 时，一阶网图 $F(1,n)$ 是边友好图.

证明 给出 $F(1,n)$ 的边标号：$f(u_{i1}v_{1i})=f(u_{i1}u_{1i-1})=1, i=1,2,\cdots,\frac{n}{2}-1, f(u_{i2}v_{1i})=f(u_{i2}u_{1i-1})=0, i=1,2,\cdots,\frac{n}{2}-1, f(u_{i1}v_{(i-1)1})=f(v_{(i-1)1}u_{i2})=1, i=\frac{n}{2}, f(u_{i1}v_{1i})=f(u_{i2}v_{1i})=0, i=\frac{n}{2}, f(u_{i,2}v_{1i-1})=f(u_{i,2}v_{1,i})=1, i=\frac{n}{2}+1, f(u_{i1}v_{1i-1})=f(u_{i,1}v_{1,i})=0, i=\frac{n}{2}+1, f(u_{i,2}v_{1,i})=f(u_{i,2}v_{1i-1})=1, i=\frac{n}{2}+2,\cdots,n, f(u_{i2}v_{1j-1})=f(u_{i1}v_{1i-1})=0, i=\frac{n}{2}+2,\cdots,n$. 容易证明 $|m_0(f)-m_1(f)|\leqslant 1, |n_0(f)-n_1(f)|\leqslant 1$，所以 f 是一阶网图 $F(1,n)$ 的边友好标号. 当 $n\equiv 0(\mathrm{mod}2)$ 时，一阶网图 $F(1,n)$ 是边友好图.

参考文献：

[1] Joseph A Gallian. A dynamic survey of graph labeling [J]. The Electronic Journal of Combinatorics, 2007, # DS6(14): 1-180.

[2] Yilmaz R, Cahit I. E-cordial graphs[J]. Ars Combin, 1997, 46: 251-266.

[3] 卜长江,高振滨. 网图 $F(m,n_1,n_2,\cdots,n_m)$ 的 k-优美性[J]. 哈尔滨工程大学学报, 1995(1): 102-106.

[4] Bondy J A, USR MurTy. Graph theory with applications[M]. London: Macmillan Press Lid, 1989.

[5] Frank D. Harmonious labeling of windmill graphs and releated graph [J]. Graph Theory, 1982, 1: 85-87.

（责任编辑：尹　闯）

（上接第 13 页）

3 应用实例

例[4] 有 7 个部门要在 16 名应聘人员中招聘 9 名工作人员，这 7 个部门与这 16 名应聘人员之间的相互满意度分值已知，每个部门至少招聘一名工作人员但是至多招聘两名工作人员，每个应聘人员至多只能应聘到一个部门工作. 问题：使招聘招到的工作人员与部门之间的相互满意度分值之和最大.

此例中，我们可以根据已知构造一个加权完全偶图 G，其各边的权值即是应聘人员和各部门间相互满意度分值，首先我们使用求取最优匹配的方法，求出该图的最优匹配 M，这就为每个部门各招聘到了一名工作人员. 剩余的两个职位我们可以在图 $G'=G-M$ 中用本文提出的算法求取 2 边最优匹配，为余下的两个职位找到最合适的两名应聘人员（关于应聘人员和各部门相互满意度分值的计算等内容参见 2004 年全国大学生数学建模竞赛 D 题及文献[4]）. 经过上述两个步骤，就可以保证例题中的 7 个部门都能招到至少一名工作人员，同时也保证了剩余两个职位所招聘的人员和对应部门之间的相互满意度分值最高.

参考文献：

[1] 殷剑宏，吴开亚. 图论及其算法[M]. 合肥：中国科学技术大学出版社，2003：185.

[2] 王树禾. 图论[M]. 北京：科学出版社，2004.

[3] Douglas B West. 图论导引[M]. 北京：机械工业出版社，2006.

[4] 韩中庚. 招聘公务员问题的优化模型与评述[J]. 工程数学学报，2004，21(12)：147-154.

（责任编辑：韦廷宗）