广西科学院学报 2009,25(1):12～13,16
Journal of Guangxi Academy of Sciences Vol. 25,No. 1 February 2009

在加权完全偶图中求2边最优匹配的算法*

An Algorithm of 2-edge Optimal Matching in Weighted Complete Bipartite Graph

吴文权,谢 科,曾兴莲
WU Wen-quan,XIE Ke,ZENG Xing-lian

(阿坝师范高等专科学校数学系,四川汶川 623000)
(Department of Mathematics,Aba Normal College,Wenchuan,Sichuan,623000,China)

摘要:给出不完全最优匹配的定义,并提出在加权完全偶图中求2边最优匹配的算法,最后举例说明其应用.

关键词:加权完全偶图 不完全最优匹配 2边匹配 算法

中图法分类号:O157.5 **文献标识码**:A **文章编号**:1002-7378(2009)01-0012-02

Abstract: This paper offers the definition of incomplete optimal matching, in addition, we proposed the algorithm of 2-edge optimal matching and illustrates its applications.

Key words: weighted complete bipartite graph, incomplete optimal matching of bipartite graph, 2-edge optimal matching, algorithm

图的匹配和最优匹配问题,是应用数学中一个非常值得深入探讨的问题,其中图的最优匹配算法已由Kuhn和Munkres提出,但是此算法却不能用于求图的不完全最优匹配,并且关于图论的各种专著中也没有提及不完全最优匹配的算法[1~3].作为最优匹配的重要扩展,不完全最优匹配在某些领域有着非常重要的实际应用[4].本文对图的不完全最优匹配算法问题进行探讨,提出在加权完全偶图中求2边最优匹配的算法.

1 不完全最优匹配的定义

定义1[1~3] 若简单无向图$G=\langle V,E\rangle$的顶点集可以划分为两个子集V_1和V_2,使G中的每一条边e的一个端点在V_1中,另一个端点在V_2中,则称G为偶图,记为$G=\langle V_1,V_2,E\rangle$.若偶图$G$中,$V_1$的每一个顶点都与$V_2$的每一个顶点邻接,则称$G$为完全偶图.

设加权完全偶图$G=\langle V_1,V_2,E\rangle$,其中$V_1=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$,$V_2=\{y_1,y_2,\cdots,y_m\}$,$m\geqslant n$.$e\in E$,$w(e)$表示边$e$的权,令$G'\subset G$,则$w(G')=\sum_{e\in E(G')}w(e)$表示子图$G'$的边权之和.

定义2 称偶图G中一个只含有p条边的匹配M为G的p边最优匹配,若对任何其它只含有p条边的匹配M',都有$w(M')\leqslant w(M)$.若$p<n$,则称M为G的不完全最优匹配,若$p=n$,则M就简称为G的最优匹配.

2 加权完全偶图中求2边最优匹配的算法

2.1 最大权边和次大权边

不难看出,求图G的1边最优匹配问题是一个平凡问题,只须令图G中权值最大的边为M中的唯一元素即可.当$p\geqslant 2$时,问题将变得更加复杂.

设$a,b\in E(G)$,若$\forall e\in E(G)$,有$w(e)\leqslant w(a)$,则称a为G中权最大的边;若$\forall e\in E-\{a\}$(a为G中权最大的边),有$w(e)\leqslant w(b)$,称b为G中权次大的边.显然,G中权最大的边不一定惟一,当G中权最大的边不惟一时,有$w(b)=w(a)$,否则有$w(b)<w(a)$.当我们说边e不是权最大的边,是指$w(e)<w(a)$(即使权最大的边不惟一);说边e既不是权最大的边也不是权次大的边,是指$w(e)<w(b)\leqslant w(a)$.

定理1 设有加权完全偶图G,M为G的p边最优匹配,那么M一定包含G中权最大的边或其邻边.

收稿日期:2008-03-31
作者简介:吴文权(1968-),男,副教授,主要从事数学建模及微分方程定性理论研究.
*四川省教育厅科研基金项目(2006C057)资助.

证明 设 G 中权最大的边为 a(a 可能不惟一),假设 M 既不包含边 a 也不包含 a 的邻边,我们可在 M 中任取一条边 e,显然 $w(e) < w(a)$,令 $M' = (M - \{e\}) \cup \{a\}$,不难知道 M' 也是图 G 的含 p 条边的匹配,但是 $w(M') > w(M)$,这与 M 是 G 的 p 边最优匹配矛盾,从而定理 1 得证.

易知,对于最优匹配,定理 1 仍然成立.我们重点讨论 $p=2$ 的情形.

定理 2 若加权完全偶图 G 的一个含两条边的匹配 M,它既不包含 G 中权最大的边也不包含 G 中权次大的边,则 M 一定不是图 G 的 2 边最优匹配.

证明 设图 G 中权最大的边为 a,权次大的边为 b,匹配 $M = \{c,d\}$,由题意,可设 $w(d) \leqslant w(c) < w(b) \leqslant w(a)$.若 M 是图 G 的 2 边最优匹配,则 a 与 b 必相邻,否则,由边 a 与 b 组成的匹配必是图 G 的 2 边最优匹配.不仅 a 与 b 相邻,而且 a 和 b 也都必分别与 c 相邻,否则,设 a 与 c 不相邻,则边 a 与 c 组成的匹配其权值之和比 M 的权大,这与 M 为 2 边最优匹配矛盾.同理,a 和 b 也都必分别与 d 相邻.此时,边 a、b、c、d 必有一个公共顶点,从而 c 与 d 相邻,这与 M 是匹配矛盾.定理 2 得证.

由定理 2 易得如下推论.

推论 1 加权完全偶图 G 的 2 边最优匹配必定包含图 G 中权最大的边或权次大的边.

图 1 的例子可以说明图加权完全 G 的 2 边最优匹配不一定包含图 G 中权最大的边.图 1 的 2 边最优匹配为$\{(x_1,y_2)(x_2,y_1)\}$,而没有包含权最大的边.

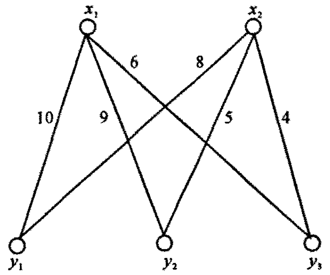

图 1 一个加权完全偶图 G

2.2 求 2 边最优匹配的算法

根据前面的讨论,我们给出一个在加权完全偶图中求 2 边最优匹配的算法,并证明其正确性.

设加权完全偶图 $G = \langle V_1, V_2, E\rangle$,其中 $V_1 = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$,$V_2 = \{y_1, y_2, \cdots, y_m\}$,$3 \leqslant n \leqslant m$.

在给出算法之前,我们将边集 E 分为若干边子集 $E_1, E_2, \cdots, E_k$,满足:(1)$E_i \neq \Phi$,$i = 1,2,\cdots,k$;(2)$\bigcup_{i=1}^{k} E_i = E$;(3)$E_i \cap E_j = \Phi$,$i \neq j$ 时;(4)$\forall\ e_1, e_2 \in E_i$,有 $w(e_1) = w(e_2)$,$i = 1,2,\cdots,k$;(5)$\forall\ e \in E_i$,$\forall\ e' \in E_{i+1}$,有 $w(e') < w(e)$,$i = 1,2,\cdots,k$.这里分类的目的是将权相等的边分在一个边子集中,并且 E_1 中的边权要大于 E_2 中的边权,E_2 中的边权要大于 E_3 中的边权,以此类推.

我们先给出一个子算法,该子算法的目的是求出图 G' 中包含边子集 E' 中的边且边权之和最大的 2 边匹配:

步骤 1:令 $M' \leftarrow \varnothing$;

步骤 2:$M \leftarrow \varnothing$;

步骤 3:$\forall\ a \in E'$,$M \leftarrow M \cup \{a\}$,$G' \leftarrow G' - \{a\}$,$E' \leftarrow E' - \{a\}$;

步骤 4:在图 G' 中找出与边 a 不相邻且权最大的边 a',令 $M \leftarrow M \cup \{a'\}$,若 $w(M) > w(M')$,则令 $M' \leftarrow M$;

步骤 5:若 $E' = \Phi$,则输出 M',否则转步骤 2.

该子算法用穷举法对 E' 中的所有边找出一个边权之和最大的 2 边匹配,然后再在其中选出一个最大的 2 边匹配,所以该子算法可以实现我们预期的目的.

求 2 边最优匹配的算法如下:

步骤 1:令 $M_1 = \varnothing$,$M_2 = \varnothing$;

步骤 2:若 $|E_1| > 1$,则执行步骤 3,否则执行步骤 4;

步骤 3:令 $E' \leftarrow E_1$,$G' \leftarrow G$,调用子算法,令 $M_1 \leftarrow M'$,输出 M_1,算法终止;

步骤 4:令 $E' \leftarrow E_1$,$G' \leftarrow G$,调用子算法,令 $M_1 \leftarrow M'$;令 $E' \leftarrow E_2$,$G' \leftarrow G - E_1$,调用子算法,令 $M_2 \leftarrow M'$;若 $w(M_1) > w(M_2)$,则直接输出 M_1,否则输出 M_2.

由求 2 边最优匹配的算法的过程知,当 $|E_1| > 1$ 时,图 G 的权最大边和权次大边都在 E_1 中,所以由推论 1 知得到的匹配 M_1 就是 2 边最优匹配;当 $|E_1| > 1$ 时,M_1 是图 G 中包含权最大边(在 E_1 中)且权值之和最大的匹配,而 M_2 是图 $G - E_1$ 中包含权次大边(在 E_2 中)且权值之和最大的匹配.由推论 1,图 G 的 2 边最优匹配只可能是 M_1 或 M_2.由此,算法的正确性得到证明.

(下转第 16 页)

理 3 成立.

定理 4 当 $n \equiv 0(\mathrm{mod}2)$ 时，一阶网图 $F(1,n)$ 是边友好图.

证明 给出 $F(1,n)$ 的边标号：$f(u_{i1}v_{1i}) = f(u_{i1}u_{1i-1}) = 1, i = 1,2,\cdots,\frac{n}{2}-1, f(u_{i2}v_{1i}) = f(u_{i2}u_{1i-1}) = 0, i = 1,2,\cdots,\frac{n}{2}-1, f(u_{i1}v_{(i-1)1}) = f(v_{(i-1)1}u_{i2}) = 1, i = \frac{n}{2}, f(u_{i1}v_{1i}) = f(u_{i2}v_{1i}) = 0, i = \frac{n}{2}, f(u_{i,2}v_{1i-1}) = f(u_{i,2}v_{1,i}) = 1, i = \frac{n}{2}+1, f(u_{i1}v_{1i-1}) = f(u_{i,1}v_{1,i}) = 0, i = \frac{n}{2}+1, f(u_{i,2}v_{1,i}) = f(u_{i,2}v_{1i-1}) = 1, i = \frac{n}{2}+2,\cdots,n, f(u_{i2}v_{1j-1}) = f(u_{i1}v_{1i-1}) = 0, i = \frac{n}{2}+2,\cdots,n$. 容易证明 $|m_0(f) - m_1(f)| \leqslant 1, |n_0(f) - n_1(f)| \leqslant 1$，所以 f 是一阶网图 $F(1,n)$ 的边友好标号. 当 $n \equiv 0(\mathrm{mod}2)$ 时，一阶网图 $F(1,n)$ 是边友好图.

参考文献：

[1] Joseph A Gallian. A dynamic survey of graph labeling [J]. The Electronic Journal of Combinatorics, 2007, # DS6(14): 1-180.

[2] Yilmaz R, Cahit I. E-cordial graphs[J]. Ars Combin, 1997, 46: 251-266.

[3] 卜长江，高振滨. 网图 $F(m,n_1,n_2,\cdots,n_m)$ 的 k-优美性 [J]. 哈尔滨工程大学学报，1995(1): 102-106.

[4] Bondy J A, USR MurTy. Graph theory with applications[M]. London: Macmillan Press Lid, 1989.

[5] Frank D. Harmonious labeling of windmill graphs and releated graph [J]. Graph Theory, 1982, 1: 85-87.

（责任编辑：尹 闯）

（上接第 13 页）

3 应用实例

例[4] 有 7 个部门要在 16 名应聘人员中招聘 9 名工作人员，这 7 个部门与这 16 名应聘人员之间的相互满意度分值已知，每个部门至少招聘一名工作人员但是至多招聘两名工作人员，每个应聘人员至多只能应聘到一个部门工作. 问题：使招聘招到的工作人员与部门之间的相互满意度分值之和最大.

此例中，我们可以根据已知构造一个加权完全偶图 G，其各边的权值即是应聘人员和各部门间相互满意度分值，首先我们使用求取最优匹配的方法，求出该图的最优匹配 M，这就为每个部门各招聘到了一名工作人员. 剩余的两个职位我们可以在图 $G' = G - M$ 中用本文提出的算法求取 2 边最优匹配，为余下的两个职位找到最合适的两名应聘人员（关于应聘人员和各部门相互满意度分值的计算等内容参见 2004 年全国大学生数学建模竞赛 D 题及文献[4]）. 经过上述两个步骤，就可以保证例题中的 7 个部门都能招到至少一名工作人员，同时也保证了剩余两个职位所招聘的人员和对应部门之间的相互满意度分值最高.

参考文献：

[1] 殷剑宏，吴开亚. 图论及其算法[M]. 合肥：中国科学技术大学出版社，2003: 185.

[2] 王树禾. 图论[M]. 北京：科学出版社，2004.

[3] Douglas B West. 图论导引[M]. 北京：机械工业出版社，2006.

[4] 韩中庚. 招聘公务员问题的优化模型与评述[J]. 工程数学学报，2004, 21(12): 147-154.

（责任编辑：韦廷宗）