广西科学院学报
Journal of Guangxi Academy of Sciences

2009,25(1):9～11
Vol. 25, No. 1 February 2009

两个一阶时滞差分方程振动解的零点距离

The Distance of Zero in Oscillatory Solutions for Two Delay Difference Equations of First Order

杨继昌，沈柳平
YANG Ji-chang, SHEN Liu-ping

（柳州师范高等专科学校数计系，广西柳州 545004）
(Department of Mathematics and Computer Science, Liuzhou Teachers College, Liuzhou, Guangxi, 545004, China)

摘要：讨论两个带连续变量的一阶时滞差分方程 $\Delta_\tau x(t)+pf(x(t-\sigma))=0$ 和 $\Delta_\tau x(t)+p(t)f(x(t-\sigma))=0$ 振动解的零点距离，得到这两个方程振动解零点距离的 3 个结果.

关键词：时滞差分方程 振动解 零点距离
中图法分类号：O175 **文献标识码**：A **文章编号**：1002-7378(2009)01-0009-03

Abstract: Two delay difference equations of first order with continuous arguments $\Delta_\tau x(t)+pf(x(t-\sigma))=0$, $\Delta_\tau x(t)+p(t)f(x(t-\sigma))=0$ and related lemma were presented. Three results related with the distance of zeros in oscillatory solutions for the two equations were received.

Key words: delay difference equation, oscillatory solution, distance of zeros

一个差分方程非平凡解 $x(t)$ 称为是振动的，如果 $x(t)$ 有任意大的零点，或者说 $x(t)$ 的零点集合无上界. 否则称 $x(t)$ 为非振动的. 一个方程的解 $x(t)$ 称为最终正（负）解，如果 $\exists\, T$，当 $t_0 \leqslant T < t$ 时有 $x(t) > 0\ (x(t) < 0)$.

目前，对差分方程的振动性以及振动解或非振动解的渐近性的讨论日益深入. 但是，对于振动解的零点距离的研究却很少. 本文讨论

$$\Delta_\tau x(t) + pf(x(t-\sigma)) = 0\,, \tag{1}$$

和

$$\Delta_\tau x(t) + p(t)f(x(t-\sigma)) = 0 \tag{2}$$

两个带连续变量的一阶时滞差分方程[1]振动解的零点距离，其中 $\Delta_\tau x(t) = x(t+\tau) - x(t)$，$p$、$\tau$、$\sigma \in (0,+\infty)$，$p(t) \in C([t_0,+\infty),(0,+\infty))$，$f \in (R,R)$，且当 $u \neq 0$ 时有 $\frac{f(u)}{u} \geqslant 1$.

1 相关引理

引理 1[2] 设 $x(t)$ 为方程(1) 的最终正解，$\max\{p, \frac{p\sigma}{\tau}\} < 1$，则存在 $z(t)$，使得 $z'(t) < 0$，$z(t) > 0$，并且满足

$$z'(t) + \frac{p}{\tau} z(t-\sigma) \leqslant 0. \tag{3}$$

引理 2 设 $x(t)$ 为方程(2) 的最终正解，$q(t) = \min\limits_{t\leqslant s\leqslant t+\tau}\{p(s)\}$，$\max\{q(t), \frac{\sigma q(t)}{\tau}\} \leqslant 1$，则存在 $z(t)$，有 $z'(t) < 0$，$z(t) > 0$，并且满足

$$z'(t) + \frac{q(t)}{\tau} z(t-\sigma) \leqslant 0. \tag{4}$$

证明 由于 $x(t)$ 为方程(2) 的最终正解，即 $\exists\, T$，当 $t_0 \leqslant T < t$ 时有 $x(t) > 0$，令 $u(t) = \int_t^{t+\tau} x(s)\mathrm{d}s$，$t > T + \sigma$，则 $u(t) > 0$，并且 $u'(t) = \Delta_\tau x(t)$，代入方程(2)，可得

$$u'(t) + p(t)f(x(t-\sigma)) = 0, \tag{5}$$

由于 $u \neq 0$ 时 $\frac{f(u)}{u} \geqslant 1$，则

$$f(x(t-\sigma)) \geqslant x(t-\sigma) > 0, \tag{6}$$

由(5)、(6) 式，可得

$$u'(t) + p(t)x(t-\sigma) = 0, \tag{7}$$

将(7) 式从 t 到 $t+\tau$ 积分，得

$$\Delta_\tau u(t) + \int_t^{t+\tau} p(s)x(s-\sigma)\mathrm{d}s \leqslant 0,$$

由于 $q(t) = \min\limits_{t\leqslant s\leqslant t+\tau}\{p(s)\}$，则

收稿日期：2008-10-09
作者简介：杨继昌(1972-)，男，讲师，主要从事微分方程研究.

$$\Delta_\tau u(t) + q(t)\int_t^{t+\tau} x(s-\sigma)\mathrm{d}s \leqslant 0,$$

即

$$\Delta_\tau u(t) + q(t)u(t-\sigma) \leqslant 0, \tag{8}$$

设 $z(t) = \int_t^{t+\tau} u(s)\mathrm{d}s, t > T+\sigma$,则 $z(t) > 0, z'(t) = \Delta_\tau u(t) < 0$,代入(8)式得

$$z'(t) + q(t)u(t-\sigma) \leqslant 0, \tag{9}$$

由(5)、(6)式及 $p(t) > 0$,可知 $u'(t) = -p(t)f(x(t-\sigma)) < 0$,则

$$z(t) = \int_t^{t+\tau} u(s)\mathrm{d}s \leqslant \tau u(t), \tag{10}$$

由(9)、(10)式,可得

$$z'(t) + \frac{q(t)}{\tau} z(t-\sigma) \leqslant 0.$$

考虑微分不等式

$$y'(t) + py(t-\sigma) \leqslant 0, \tag{11}$$

则有下面的引理 3.

引理 3 设 $p\sigma > \frac{1}{e}$,$y(t)$ 为微分不等式(11)的解,如果存在 $T > t_0$,对 $t \in [t_0, T]$,有 $y(t) > 0$,则当 $T \geqslant t_0 + (n+2)\sigma$ 时,有

$$w(T) > 1 + \frac{n}{p\sigma}(1 + \ln p\sigma), \tag{12}$$

其中,$w(t) = \frac{y(t-\sigma)}{y(t)}$,$n$ 为非负整数.

证明 若 $n = 0$,由(11)式可知 $y'(t) < 0, t \in [t_0 + \sigma, T]$,则当 $T \geqslant t_0 + 2\sigma$ 时,有 $w(T) = \frac{y(T-\sigma)}{y(T)} > 1$. 若 $n \geqslant 1$,用 $y(t)$ 除(11)式两端,然后从 $t-\sigma$ 到 t 积分,可得

$$\ln\frac{y(t-\sigma)}{y(t)} \geqslant p\int_{t-\sigma}^{t} \frac{y(s-\sigma)}{y(s)}\mathrm{d}s,$$

于是

$$w(t) \geqslant \exp p\int_{t-\sigma}^{t} w(s)\mathrm{d}s \geqslant \exp(p\sigma \min_{t-\sigma\leqslant s\leqslant t} w(s)), \tag{13}$$

设 $F(x) = e^{tx} - x - \frac{1}{t}(1 + \ln t), (t > 0)$,则 $F'(x) = te^{tx} - 1$,令 $F'(x) = 0$,可得 $x = -\frac{\ln t}{t}$,若 $x > -\frac{\ln t}{t}$,有 $F'(x) > 0$;若 $x < -\frac{\ln t}{t}$,有 $F'(x) < 0$. 由于 $\lim_{x\to\infty} F(x) = \infty$,则 $x = -\frac{\ln t}{t}$ 是 $F(x)$ 的最小值点,则 $F(x) \geqslant F(-\frac{\ln t}{t}) = 0, x \in R$,即

$$e^{tx} \geqslant x + \frac{1}{t}(1 + \ln t), \tag{14}$$

设 $w(\xi_0) = \min_{t-\sigma\leqslant s\leqslant t} w(s), \xi_0 \in [t-\sigma, T]$,由(13)、(14)式及 $p\sigma > \frac{1}{e} > 0$,可得

$$w(T) \geqslant \exp(p\sigma w(\xi_0)) \geqslant w(\xi_0) + \frac{1}{p\sigma}(1 + \ln p\sigma). \tag{15}$$

设 $w(\xi_i) = \{\min w(s), s \in [\xi_{i-1} - \sigma, \xi_{i-1}]\}, i = 1, 2, \cdots, n-1$,定义一序列 $\{\xi_0, \xi_1, \cdots, \xi_{n-1}\}$,显然,$\xi_i \in [\xi_{i-1} - \sigma, \xi_{i-1}]$,结合(13)、(14)式,可得

$$w(\xi_{i-1}) \geqslant w(\xi_i) + \frac{1}{p\sigma}(1 + \ln p\sigma), \tag{16}$$

由(15)、(16)式,可得

$$w(T) \geqslant w(\xi_0) + \frac{1}{p\sigma}(1 + \ln p\sigma) \geqslant w(\xi_1) + \frac{2}{p\sigma}(1 + \ln p\sigma) \geqslant \cdots \geqslant w(\xi_{n-1}) + \frac{n}{p\sigma}(1 + \ln p\sigma),$$

由第一步的证明可知,当 $t_0 + 2\sigma \leqslant \xi_{n-1} \leqslant T$ 时,有 $w(\xi_{n-1}) > 1$,从而 $w(T) > 1 + \frac{n}{p\sigma}(1 + \ln p\sigma)$.

2 主要结果

定理 1[3] 假设 $\frac{p\sigma}{\tau} > \frac{1}{e}, \max\{\frac{p\sigma}{\tau}, p\} < 1$,$x(t)$ 是方程(1)在 $[t_0, +\infty)$ 上的解,I 是 $[t_0, +\infty]$ 的一个长度为 $n_0\sigma$ 的闭区间,则 $x(t)$ 在 I 上不恒正. 其中

$$n_0 = \max\{4, 4 + [\frac{2\tau^2 - 2p\sigma\tau - \sigma^2 p^2}{p\sigma\tau(1 + \ln\frac{P\sigma}{\tau})}]\}, \tag{17}$$

$[\cdot]$ 为取整函数.

例 1 考虑差分方程

$$x(t+1) - x(t) + \frac{1}{2}x(t-1) = 0. \tag{18}$$

将方程(18)与方程(1)比较,可知 $\tau = \sigma = 1, p = \frac{1}{2}$,则由定理 1 可知 $n_0 = \max\{4, 4 + [\frac{2 - 1 - \frac{1}{4}}{\frac{1}{2}(1 + \ln\frac{1}{2})}]\} = 9$,从而方程(18)的任意解的零点距离不超过 9.

定理 2 假设 $q(t) = \min_{t\leqslant s\leqslant t+\tau}\{p(s)\}, \max\{q(t), \frac{\sigma q(t)}{\tau}\} < 1, \liminf_{t\to\infty}\int_{t-\sigma}^{t} q(s)\mathrm{d}s = k > \frac{\tau}{e}$,设 $x(t)$ 为方程(2)在 $[t_0, +\infty]$ 上的解,令 $\alpha, \tau \in (0,1)$ 使得 $\alpha k > \frac{\tau}{e}$,则 $x(t)$ 在 $[t_0, +\infty]$ 上的零点距离不超过 $(1 + n_\alpha)\sigma$. 其中

$$n_\alpha = \max\{4, 4 + [\frac{2\tau^2 - 2\alpha k\tau - \alpha^2 k^2}{\alpha k\tau(1 + \ln\frac{\alpha k}{\tau})}]\}, \tag{19}$$

$[\cdot]$ 为取整函数.

证明 对 $\forall\, t \geqslant t_0, \forall\, \alpha \in (0,1)$,有

$$\int_{t-\sigma}^{t} q(s)\mathrm{d}s > k\alpha, \tag{20}$$

可知 $x(t)$ 在任意区间$[t,t+(1+n_a)\sigma]$,$(t\geqslant t_0)$ 上至少有一个零点,否则,假设$\exists\ t'\geqslant t_0$,使 $x(t)$ 在$[t',t'+(1+n_a)\sigma]$上无零点,不妨设 $x(t)>0$,由引理2及其证明可知,$\exists\ z(t)$,使$z'(t)<0$,$z(t)>0$及(4)式成立.

设 $u=\psi(t)=\int_{t_0}^{t}\frac{q(s)}{\tau}\mathrm{d}s$,$y(u)=z(t)=z(\psi^{-1}(u))$,则

$$t-\sigma=\psi^{-1}(\psi(t-\sigma))=\psi^{-1}(\psi(t)-(\psi(t)-\psi(t-\sigma)))=\psi^{-1}(u-(\int_{t_0}^{t}\frac{q(s)}{\tau}\mathrm{d}s-\int_{t_0}^{t-\sigma}\frac{q(s)}{\tau}\mathrm{d}s))=$$
$$\psi^{-1}(u-\int_{t-\sigma}^{t}\frac{q(s)}{\tau}\mathrm{d}s)=\psi^{-1}(u-\int_{\psi^{-1}(u)-\sigma}^{\psi^{-1}(u)}\frac{q(s)}{\tau}\mathrm{d}s),\tag{21}$$

$$z'(t)=\frac{\mathrm{d}y(u)}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=y'(u)\cdot\frac{q(t)}{\tau},\tag{22}$$

再利用(21)、(22) 及(4) 式,可得

$$y'(t)+y(u-\int_{\psi^{-1}(u)-\sigma}^{\psi^{-1}(u)}\frac{q(s)}{\tau}\mathrm{d}s)\leqslant 0,$$

由(20)式及$\tau\in(0,1)$可知$\int_{\psi^{-1}(u)-\sigma}^{\psi^{-1}(u)}\frac{q(s)}{\tau}\mathrm{d}s)>k\alpha$,再由 $y'(u)=z'(t)<0$,可得$y'(u)+y(u-k\alpha)<0$,类似定理 1 的证明[3],可知 $y(u)$ 在$[\psi(t'),\psi(t'+n_a\sigma)]$上有零点,于是$\exists\ \bar{u}\in[\psi(t'),\psi(t'+n_a\sigma)]$,使$y(\bar{u})=0$,令$t^*=\psi^{-1}(\bar{u})$,则$z(t^*)=0$,$\forall\ t^*\in[t',t'+n_a\sigma]\subset[t',t'+(1+n_a)\sigma]$,这与在$[t',t'+(1+n_a)\sigma]$上 $z(t)>0$ 矛盾,于是 $x(t)$ 在$[t,t+(1+n_a)\sigma]$ 上至少有一个零点,并且零点距离在$[t_0,+\infty]$上不超过$(1+n_a)\sigma$.因此定理 2 得证.

定理3 假设$q(t)=\min\limits_{t\leqslant s\leqslant t+\tau}\{p(s)\}$,$q(t)\geqslant 1$或$\frac{\sigma q(t)}{\tau}\geqslant 1$,$\lim\limits_{t\to\infty}\inf\int_{t-\sigma}^{t}q(s)\mathrm{d}s=k>\frac{\tau}{e}$,$x(t)$ 为方程(2) 在$[t_0,+\infty]$上的解,则$\exists\ T\geqslant t_0$,使 $x(t)$ 在I中至少有1个零点.其中I为$[t_0,+\infty]$上长度为$2\sigma+\tau$的任意区间.

证明 假设不然.则对任意大的$T\geqslant t_0$,$\exists\ t'\geqslant T$,使 $x(t)$ 在$[t',t'+2\sigma+\tau]$上无零点,不妨设$x(t)>0$.

如果 $q(t)\geqslant 1$,由引理 2 的证明知,$\exists\ u(t)$ 有 $u(t)>0$,$u'(t)<0$及$\Delta_\tau u(t+\sigma)+q(t+\sigma)u(t)\leqslant 0$,这里$\forall\ t\in[t',t'+2\sigma+\tau]$,注意到$q(t)\geqslant 1$,则$\Delta_\tau u(t+\sigma)+u(t)\leqslant 0$,由于$u'(t)<0$,则$u(t+\sigma+\tau)-u(t+\sigma)+u(t+\sigma)<0$,与$u(t)>0$矛盾.

如果$\frac{\sigma q(t)}{\tau}\geqslant 1$,即$\frac{q(t)}{\tau}\geqslant\frac{1}{\sigma}$,由引理2知,$z(t)>0$,$z'(t)=\Delta_\tau u(t)<0$及(4)式成立.于是

$$z'(t)+\frac{1}{\sigma}z(t)<0,\tag{23}$$

将(23)式从t到$t+\sigma$积分,可得$z(t+2\sigma)-z(t+\sigma)+z(t+\sigma)<0$,与$z(t)>0$矛盾.所以$x(t)$在$I$上至少有1个零点.

参考文献:

[1] Zhang B G,Jun Yan S K Choi. Oscillation for difference equations with continuous variable[J]. Comput Math Appl,1998,36:11-18.

[2] Zhang Y,Yan J. Oscillation criteria for difference equations with continuous arguments[J]. Acta Math Scinca,1995,38:406-411.

[3] Yan Jurang, Zhang Fengqin. Oscillation for system of delay difference equation[J]. J Math Anal Appl,1999,230:223-231.

(责任编辑:韦廷宗)

禽流感疫苗快速检测方法问世

H5N1 型病毒已引发人禽流感病例,目前尚未变异至"人传人"的程度。医学界担心,H5N1 型病毒可能继续变异,致使禽流感在人类中出现大规模流行。

瑞士医药企业诺华公司研发出一种快速检测禽流感疫苗在注入人体后是否激发 H5N1 型病毒抗体的新技术,该技术有助于预防工作在禽流感大流行时迅速启动。传统的临床实验检测方法需要一年、甚至更长时间才能评估人体免疫系统对禽流感疫苗的反应。研究人员对比了两种疫苗,第一种疫苗由流感抗原制成;第二种疫苗包含流感抗原和一种辅助剂,后者可以方便免疫系统识别抗原。研究人员发现,免疫系统对第二种疫苗的反应更为强烈,能够使记忆抗原的"记忆 T 细胞"成 3 倍增长。研究人员称,这项技术能够在任何传染病流行之初帮助鉴别并生产有效疫苗。

(据科学网)