

一类生化反应模型的 Hopf 分支 Hopf Bifurcation of a Class of Biochemical Reaction Models

李伟伟¹, 李 亮²

LI Wei-wei¹, LI Liang²

(1. 桂林电子科技大学数学与计算科学学院, 广西桂林 541004; 2. 伊犁师范学院数学系应用数学研究所, 新疆伊宁 835000)

(1. School of Mathematics and Computational Science, Guilin University of Electronic Technology, Guilin, Guangxi, 541004, China; 2. Department of Mathematics, Institute of Applied Mathematics, Ili Normal University, Yining, Xinjiang, 835000, China)

摘要:对一类生物化学振荡反应的 Brussel 振子模型进行定性分析, 采用规范形理论讨论该模型 Hopf 分支存在的条件和稳定性.

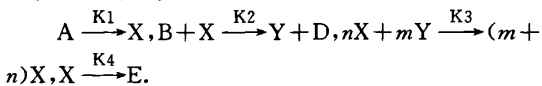
关键词: Hopf 分支 细焦点 极限环 规范形 周期解

中图分类号: O175.12 **文献标识码:** A **文章编号:** 1002-7378(2008)03-0181-03

Abstract: In this paper, a qualitative analysis of the biochemical Reaction Models was given. Not only the sufficient condition for occurrence of the Hopf bifurcation but also the stability of the Hopf bifurcation by Normal Form Theory were obtained.

Key words: Hopf bifurcation, fine focus, limit cycle, canonical form, periodic solution

近30年来, 数学家们用常微分方程定性方法研究化学振荡^[1,2]. 其中一类生物化学振荡 Brussel 振子模型的化学模型为:



其数学模型为

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a - (b+c)x + x^n y^m, \\ \frac{dy}{dt} = bx - x^n y^m, \end{cases} \quad (a > 0, b > 0, c > 0).$$

> 0).

文献[1]研究生物化学振荡中最简单最基本的一种 Brussel 振子模型

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a - (b+1)x + x^2 y, \\ \frac{dy}{dt} = bx - x^2 y, \end{cases} \quad (a > 0, b > 0),$$

得到该模型极限环的存在唯一性及稳定性. 本文采用规范形理论来讨论更一般的 Brussel 振子模型

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a - (b+c)x + x^2 y, \\ \frac{dy}{dt} = bx - x^2 y \end{cases} \quad (1)$$

的 Hopf 分支, 讨论该模型 Hopf 分支存在的条件及 Hopf 分支的稳定性.

1 模型的奇点类型

$\forall a, c \in (0, +\infty)$, b 为参变量, $x, y \geq 0$ 方程组有唯一的奇点 $(x_0, y_0) = (\frac{a}{c}, \frac{cb}{a})$, 令 $x = \xi + \frac{a}{c}$, $y = \eta + \frac{cb}{a}$, 则模型(1)转化为

收稿日期: 2007-10-30

修回日期: 2008-03-06

作者简介: 李伟伟(1982-), 女, 硕士研究生, 主要从事微分方程定性理论研究.

$$\begin{cases} \frac{d\xi}{dt} = (b-c)\xi + \frac{a^2}{c^2}\eta + \frac{cb}{a}\xi^2 + \frac{2a}{c}\xi\eta + \xi^2\eta, \\ \frac{d\eta}{dt} = -b\xi - \frac{a^2}{c^2}\eta - \frac{cb}{a}\xi^2 - \frac{2a}{c}\xi\eta - \xi^2\eta, \end{cases} \quad (2)$$

可见模型(2)的平衡点为(0,0),线性近似部分的特征根为

$$\lambda_{1,2} = \frac{bc^2 - c^3 - a^2}{2c^2} \pm \frac{\sqrt{b^2c^4 - 2bc^5 - 2bc^2a^2 + c^6 - 2c^3a^2 + a^4}}{2c^2}.$$

由此可以得到:(i)当 $b = c + \frac{a^2}{c^2}$ 时, (x_0, y_0) 是中心还是焦点待定;(ii)当 $b \in (0, c + \frac{a^2}{c^2} - \frac{2a}{\sqrt{c}}]$ 时, (x_0, y_0) 是稳定结点;(iii)当 $b \in (c + \frac{a^2}{c^2} - \frac{2a}{\sqrt{c}}, c + \frac{a^2}{c^2})$ 时, (x_0, y_0) 是稳定粗焦点;(iv)当 $b \in (c + \frac{a^2}{c^2}, c + \frac{a^2}{c^2} + \frac{2a}{\sqrt{c}})$ 时, (x_0, y_0) 是不稳定粗焦点;(v)当 $b \in [c + \frac{a^2}{c^2} + \frac{2a}{\sqrt{c}}, +\infty)$ 时, (x_0, y_0) 是不稳定结点.

2 旋转向量场

令 $\bar{\xi} = \xi, \bar{\eta} = \xi + \eta$, 则原方程组转化为

$$\begin{cases} \frac{d\bar{\xi}}{dt} = a - (b+c)(\bar{\xi} + \frac{a}{c}) + (\bar{\xi} + \frac{a}{c})^2(\bar{\eta} + \frac{bc}{a}), \\ \frac{d\bar{\eta}}{dt} = -c\bar{\xi}, \end{cases} \quad (3)$$

故 $\begin{vmatrix} A & -c\bar{\xi} \\ B & -c\bar{\xi} \end{vmatrix} = \frac{c}{a}(b_2 - b_1)(a + c\bar{\xi})\bar{\xi}^2$, 其中 $A = a - (b_1 + c)(\bar{\xi} + \frac{a}{c}) + (\bar{\xi} + \frac{a}{c})^2(\bar{\eta} + \frac{b_1c}{a})$, $B = a - (b_2 + c)(\bar{\xi} + \frac{a}{c}) + (\bar{\xi} + \frac{a}{c})^2(\bar{\eta} + \frac{b_2c}{a})$, 当 $b_2 > b_1$ 时, 行列式为正, 在 $\bar{\xi}\bar{\eta}$ 面和 xy 平面第一象限对应的区域 $\bar{\xi}$ 上, 关于参数 b 是旋转向量场. 在 $\bar{\xi}\bar{\eta}$ 面上, 模型(3)的轨线与模型(1)的轨线拓扑同胚.

3 细焦点的判定与 Hopf 分支

模型(2)的线性化矩阵的特征值 $\lambda_{1,2} = \alpha(b) \pm \beta(b)i$, 其中 $\alpha(b) = \frac{bc^2 - c^3 - a^2}{2c^2}, \beta(b) = \sqrt{\frac{a^2}{c} - \alpha(b)^2}$, 由此可见, 当 $|\alpha(b)| < \frac{a}{\sqrt{c}}, b = b_0$

$= c + \frac{a^2}{c^2}$ 时, λ_1 和 λ_2 是一对复共轭纯虚根, 此时, $\alpha(b_0) = 0, \beta(b_0) = \pm \frac{a}{\sqrt{c}}, \lambda_{1,2} = \pm \frac{a}{\sqrt{c}}i$, 可以看出, $b = b_0 = c + \frac{a^2}{c^2}$ 是可能出现 Hopf 分支的参数值.

定理 1 当 $b = b_0 = c + \frac{a^2}{c^2}$ 时, 模型(1)的平衡点 $(x_0, y_0) = (\frac{a}{c}, \frac{cb}{a})$ 为稳定细焦点.

证明 首先利用坐标的线性变换, 把模型(2)写成

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = \alpha(b)u - \beta(b)v + \frac{c^2(c-b)}{a^2}u^3 + \frac{2(c^2-cb)}{a}u^2 - \frac{c^2\beta(b)}{a^2}u^2v - \frac{2c\beta(b)}{a}uv, \\ \frac{dv}{dt} = \beta(b)u + \alpha(b)v + [(c^3 + a^2 - c^2b + c^2\alpha(b))/c^2\beta(b)](\frac{c^2(c-b)}{a^2}u^3 + \frac{(2c^2-cb)}{a}u^2 - \frac{c^2\beta(b)}{a^2}u^2v - \frac{2c\beta(b)}{a}uv). \end{cases} \quad (4)$$

令

$$\begin{aligned} F(u, v) &= \sum_{i,j=0}^3 a_{ij}u^i v^j = \frac{c^2(c-b)}{a^2}u^3 + \frac{(2c^2-cb)}{a}u^2 - \frac{c^2\beta(b)}{a^2}u^2v - \frac{2c\beta(b)}{a}uv, \\ G(u, v) &= \sum_{i,j=0}^3 b_{ij}u^i v^j = \frac{c^3 + a^2 - c^2b + c^2\alpha(b)}{c^2\beta(b)}(\frac{c^2(c-b)}{a^2}u^3 + \frac{(2c^2-cb)}{a}u^2 - \frac{c^2\beta(b)}{a^2}u^2v - \frac{2c\beta(b)}{a}uv). \end{aligned}$$

由模型(4)可得, $b = b_0 = c + \frac{a^2}{c^2}$ 时, 根据文献[3], 利用一阶焦点量的计算公式可得

$$\begin{aligned} \sigma &= (a_{30} + b_{03}) + \frac{1}{3}(a_{12} + b_{21}) + \frac{\sqrt{c}}{3a}[(a_{20} + a_{02})(a_{11} + 2b_{02}) - (b_{20} + b_{02})(b_{11} + 2a_{20})] = \\ &= \frac{c^2(c-b)}{a^2} - \frac{1}{3} \frac{2c(2c^2-cb)}{a^2} = \frac{-c^3 - 3c^2b}{3a^2} < 0, \end{aligned}$$

其中 $a_{30} = \frac{c^2(c-b)}{a^2}, a_{20} = \frac{(2c^2-cb)}{a},$

$$a_{21} = -\frac{c^2\beta(b)}{a^2}, a_{11} = -\frac{2c\beta(b)}{a}, a_{12} = a_{02} = a_{03} = 0,$$

$$b_{30} = \frac{(c^3 + a^2 - c^2b + c^2\alpha(b))(c-b)}{a^2\beta(b)},$$

$$b_{20} = \frac{(c^3 + a^2 - c^2b + c^2\alpha(b))(2c^2 - cb)}{ac^2\beta(b)},$$

$$b_{21} = -\frac{c^3 + a^2 - c^2b + c^2a(b)}{a^2},$$

$$b_{11} = -\frac{2(c^3 + a^2 - c^2b + c^2a(b))}{ac},$$

$$b_{12} = b_{02} = b_{03} = 0.$$

由 Hopf 分支中稳定的细焦点或不稳定的细焦点的 liapunov 判别法可知, $(u, v) = (0, 0)$ 为稳定的细焦点, 因为模型(1)与模型(4)的轨线拓扑同胚, 故当 $b = b_0 = c + \frac{a^2}{c^2}$ 时, 模型(1)的平衡点 $(x_0, y_0) = (\frac{a}{c}, \frac{cb}{a})$ 为稳定细焦点.

定理 2 当 $b(> b_0)$ 且 $b - b_0$ 充分小时, 模型(1)在平衡点附近有唯一的稳定极限环, 即出现超临界 Hopf 分支.

证明 直接利用 Hopf 分支的有关定理来研究参数 b 在 $b_0 = c + \frac{a^2}{c^2}$ 附近的分支情况. 参考文献[4], 利用 Poincare-Birkhoff 规范形理论, 将模型(4)最终转化为

$$\begin{cases} \frac{du_1}{dx} = -\omega v_1 + [c_1 b_0 + a_1(u_1^2 + v_1^2)]u_1 - [e_1 b_0 + b_1(u_1^2 + v_1^2)]v_1, \\ \frac{dv_1}{dt} = \omega u_1 + [e_1 b_0 + b_1(u_1^2 + v_1^2)]u_1 + [c_1 b_0 + a_1(u_1^2 + v_1^2)]v_1, \end{cases} \quad (5)$$

其中 $c_1 = d'(b_0) = \frac{1}{2}, e_1 = \beta'(b_0) = 0, \omega = \beta(b_0) = \frac{a}{\sqrt{c}}, a_1 = (b_{21}\omega + 3a_{30}\omega + 3b_{03}\omega + a_{12}\omega - b_{02}b_{11} + 2a_{02}b_{02} + a_{11}a_{20} + a_{11}a_{02} - b_{20}b_{11} - 2b_{20}a_{20})/(8\omega),$
 $b_1 = (3b_{12}\omega - 9a_{03}\omega - 3a_{21}\omega + 9b_{30}\omega - 4b_{02}^2 + 5b_{02}a_{11} - 10b_{02}b_{20} - a_{11}^2 + b_{20}a_{11} - 10b_{20}^2 - 10a_{02}^2 + a_{02}b_{11} - 10a_{20}a_{02} - b_{11}^2 + 5b_{11}a_{20} - 4a_{20}^2)/(24\omega),$
 把系数代入(5)式, 容易得到 $a_1 = -\frac{c^3}{4a^2} - \frac{1}{8}, b_1 = -\frac{c^{\frac{3}{2}}}{24a} - \frac{c^{\frac{1}{2}}}{6a}(\frac{c^2}{a} - \frac{a}{c})^2.$ 利用文献[4]的方法, 可以求得 $\mu_2 = -\frac{a_1}{c_1} = \frac{c^2}{2a^2} + \frac{1}{4} > 0, \tau_2 = -\frac{b_1 + \mu_2 e_1}{\omega}$

$$= \frac{c}{6a^2}[\frac{c}{4} + (\frac{c^2}{a} - \frac{a}{c})^2] > 0.$$

由 Hopf 分支定理[4]可知, 当 $b > b_0$, 而且 $b - b_0$ 充分小时, 模型(4)在 $(u, v) = (0, 0)$ 附近有唯一的极限环, 当 $b \rightarrow b_0$ 时, 极限环趋于 $(0, 0)$. 极限环对应的周期为 $T = \frac{2\pi}{\beta(b_0)}(1 + \sum_{k=2}^{\infty} \tau_k \epsilon^k)$, 又由 $b - b_0 = \sum_{k=2}^{\infty} \mu_k \epsilon^k = \mu_2 \epsilon^2 + o(\epsilon^3)$, 将 μ_2 代入得 $\epsilon^2 = \frac{4a^2(b - b_0)}{2c^3 + a^2}$, 再将 $\tau_2 = \frac{c}{6a^2}[\frac{c}{4} + (\frac{c^2}{a} - \frac{a}{c})^2]$ 代入周期 T , 可以得到参数值为 $b(> b_0)$ 时的周期解的周期为

$$T = \frac{2\pi \sqrt{c}}{a} \{1 + \frac{c}{3}(c^3 + \frac{a^2}{2})^{-\frac{1}{2}}[\frac{c}{4} + (\frac{c^2}{a} - \frac{a}{c})^2](b - b_0) + o((b - b_0)^2)\},$$

整理得

$$T = [\pi(12a^2c^4 + 6a^4c - 7ba^2c^3 + 4bc^6 + 4ba^4 + 7b_0a^2c^3 - 4b_0c^6 - 4b_0a^4)]/[3\sqrt{c}(2a^3 + a^2)a^3].$$

同理, 当 $b(> b_0)$ 且 $b - b_0$ 充分小时, 模型(1)在平衡点附近有唯一的稳定极限环, 即出现超临界 Hopf 分支.

参考文献:

- [1] 秦元勋, 曾宪武. 生物化学中布鲁塞尔振子方程的定性研究[J]. 科学通报, 1980, 25: 337-339.
- [2] 周建莹, 张锦炎, 曾宪武. 生化反应中一类非线性方程的定性研究[J]. 应用数学学报, 1982, 5(3): 234-240.
- [3] 李林. 多项式微分系统的第一、第二阶焦点量公式[J]. 北京石油化工学院学报, 1995, 3(1): 8-12.
- [4] Hassard B D, Kazarinoff N D, Wan Y H. Theory and applications of Hopf bifurcation [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1982: 224-238.

(责任编辑: 韦廷宗)

捷克研究发现维生素 E 类似物可以抗癌

捷克科学院生物技术学院的研究人员通过动物实验发现, 维生素 E 类似物可以通过对癌细胞线粒体起作用, 从而有效抑制大肠、肺、乳腺和子宫颈中癌细胞的生长, 并且不会损害健康的人体细胞.

线粒体是细胞中制造能量的器官. 如果线粒体受到损伤, 细胞就会因缺乏能量而死亡. 而维生素 E 类似物正是通过影响癌细胞的线粒体, 从而达到有效抑制甚至杀死癌细胞的目的. 这项研究成果将有助于开发抗癌新药物.

(据科学网)