广西科学院学报 2008,24(1):9~10,15
Journal of Guangxi Academy of Sciences Vol. 24, No. 1 February 2008

非线性动力系统多项式首次积分的不存在性*

On the Nonexistence of Polynomial First Integrals for Nonlinear Dynamical Systems

沈彩霞
SHEN Cai-xia

(河池学院数学系,广西宜州 546300)
(Department of Mathematics, Hechi College, Yizhou, Guangxi, 546300, China)

摘要:给出当 $f_1,\cdots,f_n$ 为非线性多项式时,系统$\frac{\mathrm{d}x_i(t)}{\mathrm{d}t}=f_i(x_1(t),\cdots,x_n(t))$不存在多项式首次积分的1个充分条件:矩阵 A 的特征根 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 不满足任何非共振条件 $k_1\lambda_1+\cdots+k_n\lambda_n=0,k_1,\cdots,k_n\in Z^+,\sum_{i=1}^n k_i>0$.

关键词:多项式 首次积分 可积性
中图法分类号:O175 **文献标识码**:A **文章编号**:1002-7378(2008)01-0009-02

Abstract: The paper shows a sufficient condition that the system $\frac{\mathrm{d}x_i(t)}{\mathrm{d}t}=f_i(x_1(t),\cdots,x_n(t))$ does not admit polynomial first intergals when $f_1,\cdots,f_n$ are nonlinear polynomial: the eigenvalues $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ of the matrix A are not satisfied with any nonresonant condition $k_1\lambda_1+\cdots+k_n\lambda_n=0$, $k_1,\cdots,k_n\in Z^+,\sum_{i=1}^n k_i>0$.

Key words: polynomial, first integrals, integrability

设 $k[X]=k[x_1,\cdots,x_n]$ 表示有零特征的域 k(k 为复数域 C 或实数域 R 的子域)上 n 个变量的多项式环,$f=(f_1,\cdots,f_n)\in k[X]^n$. 本文考虑多项式动力系统

$$\frac{\mathrm{d}x_i(t)}{\mathrm{d}t}=f_i(x_1(t),\cdots,x_n(t)),\tag{1}$$

其中 $i=1,\cdots,n$.

对系统(1)首次积分的存在性已有很多的研究结果. Darboux[1] 对有足够多的不变代数曲线的平面多项式系统给出了构造首次积分的方法;Jouanolou[2] 证明了若 m 次平面多项式系统至少有 $\frac{m(m+1)}{2}+2$ 条不变代数曲线,则该系统有有理首次积分;Labrunie[3] 和 Moulin-Ollagnier[4] 分析三维 Lotka-Volterra 系统所有的多项式首次积分;Maciejewski 和 Strelcyn[5] 证明 Halphen 系统没有代数首次积分;Forsyth[6] 和 Goriely[7] 证明 n 维系统有 $k(k<n)$ 个代数无关的首次积分当且仅当它有 k 个代数无关的有理首次积分.

当 $f_1,\cdots,f_n$ 为齐次线性多项式时,Nowicki A[8] 给出了系统(1)存在多项式首次积分和有理首次积分的必要条件. 本文给出当 $f_1,\cdots,f_n$ 为非线性多项式时,系统(1)不存在多项式首次积分的1个充分条件.

1 相关定义及性质

设 $f(0)=0$,则

$$f_i(x)=\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j+\tilde{f}_i(x),\tag{2}$$

其中 $i=1,\cdots,n,a_{ij}\in k,\tilde{f}_i(x)=o(\|x\|^2)$.

记 $A=(a_{ij})_{n\times n}$,并设其特征根为 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$,$Z^+$ 表示非负整数集合.

定义 1[8] 函数 $\varphi\in k[X]\backslash k$ 称为系统(1)的多项式首次积分,如果

$$\sum_{i=1}^n f_i\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}=0.\tag{3}$$

定义 2[8] 设U是包含域 k 的交换环,称 d 是U

收稿日期:2007-08-21
修回日期:2007-12-05
作者简介:沈彩霞(1974-),女,讲师,主要从事常微分方程研究。
* 桂高教2007[109号]61项目,河池学院应用数学重点学科院科研2007[2号]项目资助。

中的导数，如果 $d: U \to U$ 是线性映射且 $d(ab) = ad(b) + d(a)b, a, b \in U$. U 中导数 d 的常数环记为 $U^d = \{a \in U: d(a) = 0\}$.

定义 3[8] 定义

$$d(\varphi) = \sum_{i=1}^{n} f_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}, \varphi \in k[X]. \tag{4}$$

显然 d 是 $k[X]$ 到自身的线性映射且 $d(\varphi\omega) = d(\varphi)\omega + \varphi d(\omega), \varphi, \omega \in k[X]$，并称 d 为 $k[X]$ 中的导数.

$k[X]$ 中导数 d 的常数环记为 $k[X]^d = \{\varphi \in k[X]; d(\varphi) = 0\}$. 显然，系统(1)的多项式首次积分集即为集合 $k[X]^d - k$.

性质 1[9] (1) 如果 $f_1, \cdots, f_n \in k[X]$，则 $k[X]$ 中存在唯一导数 d，使得 $d(x_1) = f_1, \cdots, d(x_n) = f_n$，其中导数 d 由(4)式得出. (2) 如果 d 是 $k[X]$ 中的导数，且 $f \in k[X]$，则 $d(f) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} d(x_i)$.

定义 4[8] 定义

$$d_{\text{lin}}(x_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j, i = 1, \cdots, n, \tag{5}$$

其中 $a_{ij} \in k$，称 d_{lin} 为线性导数.

设矩阵 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ 的 Jordan 标准形为

$$\begin{bmatrix} J_{m_1}(\rho_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_{m_s}(\rho_s) \end{bmatrix},$$

其中 $s \geqslant 1, m_1 + \cdots + m_s = n, \{\rho_1, \cdots, \rho_s\} = \{\lambda_1, \cdots, \lambda_n\}$，且每个 Jordan 块 $J_{m_i}(\rho_i)$ 为 $m_i \times m_i$ 阵

$$J_{m_i}(\rho_i) = \begin{bmatrix} \rho_i & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \rho_i & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \rho_i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \rho_i \end{bmatrix}, i = 1, \cdots, s.$$

定义 5[9] $k[X]$ 中的导数 d 称为对角的，如果存在 $\alpha_i \in k$，使得 $d(x_i) = \alpha_i x_i, i = 1, \cdots, n$.

定义 6[9] $k[X]$ 中的导数 d 称为局部幂零的，如果对 $k[X]$ 中每一个多项式 f，存在自然数 m，使得 $d^m(f) = 0$.

性质 2[10] 设 f 是 $k[X]$ 中非零齐次多项式，且 $d_{\text{lin}}(f) = pf, p \in k$，则存在非负整数 $k_1, \cdots, k_n$，使得 $k_1\lambda_1 + \cdots + k_n\lambda_n = p, k_1 + \cdots + k_n = \deg f$.

2 主要结果

定理 1 如果矩阵 A 的特征根 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 不满足任何非共振条件：

$$k_1\lambda_1 + \cdots + k_n\lambda_n = 0, k_1, \cdots, k_n \in \mathrm{Z}^+, \sum_{i=1}^{n} k_i > 0.$$

则系统(1)不存在任何多项式首次积分.

证明 系统(1)不存在任何多项式首次积分，等价于 $k[X]^d = k$，故只须证明 $k[X]^d = k$ 即可. 反证法. 假设 $k[X]^d \neq k$，即存在多项式 $F \in k[X]^d$，但 $F \notin k$. 设 $F = F_{\min} + \cdots + F_{\max}$，其中 $F_{\min}$ 和 $F_{\max}$ 分别表示 F 的最小和最大齐次分量. 若 $F \in k[X]^d$，则有 $d(F) = 0$，即 $\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_i} f_i = 0$，故 $\sum_{i=1}^{n} (\frac{\partial F_{\min}}{\partial x_i} + \cdots + \frac{\partial F_{\max}}{\partial x_i})(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + \tilde{f}_i(x)) = 0$，因此最低次数项必为 0，故 $\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F_{\min}}{\partial x_i} \cdot \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = 0$，即 $d_{\text{lin}}(F_{\min}) = 0 = 0 \cdot F_{\min}$，由命题2，存在 $k_1, \cdots, k_n \in Z_0$，使得 $k_1\lambda_1 + \cdots + k_n\lambda_n = 0, k_1 + \cdots + k_n = \deg F_{\min}$. 因为 $F \notin k$，即 $F_{\min} \notin k$，故 $k_1 + \cdots + k_n > 0$，与已知条件矛盾. 因此 $F \in k$，即 $k[X]^d = k$. 故系统(1)不存在任何多项式首次积分.

3 实例

考虑 Selkov 系统[9](常数项取零)

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = ey^3 - xy^2 - cx, \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -ey^3 + xy^2 - y, \end{cases} \tag{6}$$

其中 $c, e \in \mathrm{R}$，是否存在多项式首次积分.

解 当 $c > 0$ 时，由于矩阵 $\begin{bmatrix} -c & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ 的特征根 $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -c$ 不满足任何非共振条件，故当 $c > 0$ 时，系统(6)不存在任何多项式首次积分.

致谢：

吉林大学史少云教授指导形成本文，作者谨此表示衷心感谢。

参考文献：

[1] Darboux G. Mémoire sur les équations différentielles algébriques du premier ordre et du premier degré (mélanges)[J]. Bull Sci Math, 1878, (2)2: 60-96, 123-144, 151-200.

(下转第15页)

求较为严格,其 pH 值宜保持在中性范围内。

参考文献:

[1] 朱宝霞,李久义,栾兆坤. 城市污水混凝强化一级处理的机理探讨[J]. 给水排水,2001,27(7):10-14.

[2] 成官文,吴志超,章非娟,等. 化学除磷对沸石强化 A/O 工艺运行的影响[J]. 中国给水排水. 2003,19(13):17-20.

[3] Maurer M,Boller M. Modelling of phosphorus pretreatment in wastewater treatment plants with enhanced biological phosphorus removal[J]. Wat Sci Tech,1999,39(1):147-163.

[4] 国家环保总局. 水和废水监测分析方法[M]. 第4版. 北京:中国环境科学出版社,2002.

[5] 严瑞瑄. 水处理剂应用手册[M]. 北京:化学工业出版社,2003.

(责任编辑:韦廷宗 邓大玉)

(上接第10页)

[2] Jouanolou J P. Equations de pfaff algébriques[M]. Lectures Notes in Mathematics. Berlin:Springer-Verlag,1979.

[3] Labrunie S. On the polynomial first integrals of the (a,b,c) Lotka-Volterra system[J]. J Math Phys,1996,37:5539-5550.

[4] Moulin-ollagnier J. Polynomial first integrals of the Lotka-Volterra system[J]. Bull Sci Math,1997,121:463-476.

[5] Maciejewski A J,Strelcyn J M. On algebraic non-integrability of the Halphen system[J]. Phys Lett,1995,201:161-166.

[6] Forsyth A R. Theory of differential equations[M]. Cambridge:Cambridge University Press,1900.

[7] Goriely A. Integrability,partial integrability,and nonintegrability for systems of ordinary differential equations[J]. J Math Phys,1996,37:1871-1893.

[8] Nowicki A. On the nonexistence of ratioal first integrals for systems of linear differential equations[J]. Linear Algebra and Its Applications,1996,235:107-120.

[9] Nowicki A. Polynomial derivations and their rings of constants[M]. Torun:Copernicus Univ Press,1994.

[10] Moulin Ollagnier J,Nowicki A,Strelcyn J M. On the non-existence of constants of derivations: The proof a theorem of Jouanolou and its development[J]. Bull Sci,Math,1995,119:195-233.

(责任编辑:尹 闯)