广西科学院学报
Journal of Guangxi Academy of Sciences

2008,24(1):4～5,8
Vol. 24,No. 1 February 2008

关于复 Hilbert 空间正交投影的若干性质*
Some Properties of Orthogonal Projection in Complex Hilbert Space

周玉兴
ZHOU Yu-xing

(广西民族大学数学与计算机科学学院,广西南宁 530006)
(Department of Mathematics and Computer Science, Guangxi University for Nationalities, Nanning, Guangxi, 530006, China)

摘要:把实 Hilbert 空间的结论推广到复 Hilbert 空间情形,给出复 Hilbert 空间正交投影的一些新性质.
关键词:正交投影 正交补 内积空间 复 Hilbert 空间
中图法分类号:O177.1 **文献标识码**:A **文章编号**:1002-7378(2008)01-0004-02
Abstract: Several new properties of orthogonal projection come by in complex Hilbert space by applying the corresponding results to real Hilbert space.
Key words: orthogonal projection, orthogonal complement, inner product space, complex Hilbert space

投影主要有正交投影和斜投影两种. 算子 P 是投影当且仅当 $P^2=P$,其中 P 是沿着(或平行于)它的零空间 $N(P)$ 到其值域 $R(P)$ 上的投影,如果这些子空间是正交的,则投影 P 称为正交投影,否则,投影 P 称为斜投影. 有关实 Hilbert 空间正交投影问题,文献[1～6]有所论述. 近年来,许多学者对 Hilbert 空间算子投影理论作了进一步的探讨. 文献[7]讨论 Hilbert 空间投影算子的几个等价关系,文献[8]从格论观点研究 Hilbert 空间投影算子的代数性质,文献[9]探讨 Hilbert 空间正交投影算子收敛判别准则. 本文主要把实 Hilbert 空间的一些结论推广到复 Hilbert 空间情形,给出复 Hilbert 空间正交投影的几个新结果.

1 相关概念和引理

为讨论方便,用 H 表示复 Hilbert 空间,$(\cdot,\cdot)$ 和 $\|\cdot\|$ 分别表示 H 上的内积及其诱导出来的范数,$L(H)$ 表示从 H 到其本身的线性算子全体.

1.1 相关概念

算子 P 称为自伴的,如果 $P=P^*$;P 称为正规的,如果 $PP^*=P^*P$;P 称为伴随的,如果 $\forall\ x,y\in H$,有 $(Px,y)=(x,P^*y)$;若 $(x,y)=0$,则称 x 与 y 正交;A 的正交补记作 $A^{\perp}$.

设 X 是内积空间,M 是 X 的线性子空间,若对每一个 $x\in X$ 能唯一表示成 $x=y+z$,其中 $y\in M$,$z\in M^{\perp}$,则称 y 是 x 在 M 上的正交投影,式子 $x=y+z$ 称为 x 的正交分解.

1.2 几个引理

引理 1[4] (Cauchy-Schwarz) 设 X 是内积空间,则 $\forall\ x,y\in X$,有 $|(x,y)|\leqslant\sqrt{(x,x)}\ \sqrt{(y,y)}$.

引理 2 设 $P\in L(H)$,则

(1) $N(P^*)=R(P)^{\perp}$;

(2) $\overline{R(P^*)}=N(P)^{\perp}$.

证明 (1) 设 $x\in N(P^*)$,对 $\forall\ y\in H$,有 $(x,Py)=(P^*x,y)=0$,故 $x\in R(P)^{\perp}$,从而得到 $N(P^*)\subset R(P)^{\perp}$. 反之,设 $x\in R(P)^{\perp}$,对 $\forall\ y\in H$,有 $(P^*x,y)=(x,Py)=0$,故 $x\in N(P^*)$,因而 $R(P)^{\perp}\subset N(P^*)$. 所以 $N(P^*)=R(P)^{\perp}$.

(2) 由于 $N(P)$,$R(P)$ 都是闭集,所以 $\overline{R(P^*)}=N(P)^{\perp}$ 等价于 $R(P^*)^{\perp}=N(P)$. 设 $x\in R(P^*)^{\perp}$,对 $\forall\ y\in H$,有 $(Px,y)=(x,P^*y)=0$,故 $x\in N(P)$. 所以 $R(P^*)^{\perp}\subset N(P)$. 反之,设 $x\in N(P)$,

收稿日期:2007-07-13
修回日期:2007-10-09
作者简介:周玉兴(1975-),男,硕士研究生,主要从事泛函算子理论研究工作。
*广西民族大学 2007 年研究生教育创新计划项目(gxun-chx0751)资助。

对 $\forall\, y \in H$,有 $(x,P^{*}y) = (Px,y) = 0$. 故 $x \in R(P^{*})^{\perp}$,因而 $N(P) \subset R(P^{*})^{\perp}$. 所以 $R(P^{*})^{\perp} = N(P)$.

引理 3 算子 $P:H \to H$ 是正交投影当且仅当 P 是自伴的且幂等的($P^2 = P$).

引理 4 设 $P \in L(H)$,则对 $\forall\, x \in H$,当 P 是正规时,有 $N(P) = N(P^{*})$.

证明 由于 P 正规,即 $PP^{*} = P^{*}P$,所以对 $\forall\, x \in H$,则有

$0 = ((PP^{*} - P^{*}P)x,x) = (PP^{*}x,x) - (P^{*}Px,x) = (P^{*}x,P^{*}x) - (Px,Px) = \|P^{*}x\|^2 - \|Px\|^2$.

故 $\|P^{*}x\|^2 = \|Px\|^2$,从而 $N(P) = N(P^{*})$.

2 主要结果

定理 1 设 H 是复 Hilbert 空间,$M \subset H$,$P(H)$ 表示从 H 到 H 的正交投影算子,则

(1)P 是一个有界线性算子;

(2) 若 $x \in M \neq \{0\}$,则 $\|P\| = 1$.

证明 (1) 对 $\forall\, x,y \in H,\lambda,\mu \in K$,由正交投影定理得 $x = x_1 + x_2, y = y_1 + y_2$,其中 $x_1,y_1 \in M$,$x_2,y_2 \in M^{\perp}$. 于是,$\lambda x + \mu y = (\lambda x_1 + \mu y_1) + (\lambda x_2 + \mu y_2)$,其中 $(\lambda x_1 + \mu y_1) \in M$,$(\lambda x_2 + \mu y_2) \in M^{\perp}$. 由正交投影算子定义可得 $P(\lambda x + \mu y) = \lambda x_1 + \mu y_1 = \lambda Px + \mu Py$,故 P 是线性的. 又由引理 1 得,$\|Px\|^2 = (Px,x) \leqslant \|Px\| \cdot \|x\|$,所以对 $\forall\, x \neq 0$,$\dfrac{\|Px\|}{\|x\|} \leqslant 1$,从而 $\|P\| \leqslant 1$,故 P 是有界的.

(2) 由(1)可知,$\|P\| \leqslant 1$. 又当 $x \in M \neq \{0\}$ 时,$\|P\| \geqslant \sup\limits_{x\in M,\|x\|=1} \|Px\| = \sup\limits_{x\in M,\|x\|=1} \|x\| = 1$. 故 $\|P\| = 1$.

定理 2 设 H 是复 Hilbert 空间,P 是 H 到 H 的有界线性算子,且 $P^2 = P$. 则下列叙述是等价的:

(1)P 是自伴的;

(2)P 是正规的;

(3)$\forall\, x \in H$,$(x - Px) \perp Px$.

证明 (1)$\Rightarrow$(2):由于 P 是自伴的,即 $P = P^{*}$,所以有 $P^{*}P = PP^{*}$,故 P 是正规的.

(2)$\Rightarrow$(3):因为 P 是正规的、有界的和幂等的($P^2 = P$),所以 P 是投影. 又由引理 2 及引理 4 可得,$R(P)^{\perp} = N(P^{*}) = N(P) = R(I-P)$,故 $(I-P)x \in R(I-P) = N(P)$. 而 $Px \in R(P)$,所以 $(I-P)x \perp Px$.

(3)$\Rightarrow$(1):由于 P 是 H 到 H 的有界投影算子,且 $\forall\, x \in H$,$(x - Px) \perp Px$. 所以对 $\forall\, x \in H$,有 $(x,(P - P^{*}P)x) = (x,(I - P^{*})Px) = (x,(I - P)^{*}Px) = ((I - P)x,Px) = 0$. 故 $P - P^{*}P = 0$,即 $P = P^{*}P$. 两边取共轭转置,得 $P^{*} = P^{*}P$,故 $P = P^{*}$,即 P 是自伴的.

定理 3 设 H 是复 Hilbert 空间,$M \subset H$,则 M 是 H 的闭子空间当且仅当存在唯一的正交投影 $P \in L(H)$,使得 $R(P) = M$.

证明 必要性. 若 M 是 H 的闭子空间,则由正交投影定理:$H = M \oplus M^{\perp}$,即对每一 $x \in H$,存在 $y \in M, z \in M^{\perp}$,使得 $x = y + z$,且分解唯一. 算子 $P:H \to H$ 定义为 $Px = y$,由于 P 是 H 到本身的线性算子,显然 $R(P) = M$ 且 $N(P) = M^{\perp}$. 事实上,设 $x \in R(P) \cap N(P)$,则有 $Px = x$. 故 $R(P) \cap N(P) = \{0\}$. 又设 $x \in H$,则 $x = Px + (I - P)x$,其中 $Px \in R(P)$ 和 $(I - P)x \in N(P)$. 因为 $P(x - Px) = Px - P^2x = Px - Px = 0$,所以 $x = R(P) \oplus N(P)$,即 P 是正交投影算子,且有 $Px = x, x = M = R(P), y = M^{\perp} = N(P)$.

充分性. 设 $y \in M = R(P)$. 对 $x \in H$,有 $x = y + z$,其中 $y \in M, z \in M^{\perp}$. 因为 P 是正交投影,所以由引理 3 知,$P = P^2 = P^{*}$,$M = \{y : Py = y\}$. 对 $\forall\, x \in H$,有 $x = Px + (I - P)x$. 由于 $P(Px) = P^2x = Px$,所以 $Px \in M$. 又因为 $y \in M, Py = y$,故 $((I - P)x,y) = ((I - P)x,Py) = (P^{*}(I - P)x,y) = ((P - P^2)x,y) = 0$. 因此 $(I - P)x \perp M$. 综上所述,$M = N(I - P)$,所以 M 是闭的.

显然,当 P 有界时,P 也是连续的,因此由定理 1、3 可得如下推论.

推论 1 设 H 是复 Hilbert 空间,P 是 H 到 H 的正交投影,则 $R(P) = N(I - P)$ 和 $N(P) = R(I - P)$ 都是闭子空间.

推论 2 设 H 是复 Hilbert 空间,P 是 H 到 H 的正交投影,则 P 是把 H 投影到闭子空间 $R(P)$ 上且是一一对应的.

推论 3 设 H 是复 Hilbert 空间,H 由两两正交的子空间 $\{\mu_i\}_{i\in I}$ 张成,则 $\bigoplus\limits_{i\in I}\mu_i = \overline{\mathrm{span}}(\bigcup\limits_{i\in I}\mu_i)$,即 μ_i 的正交直和是包含每个 μ_i 的最小闭子空间.

定理 4 设 H 是复 Hilbert 空间,M 是 H 的闭子空间,则 $H = M \oplus M^{\perp}$.

证明 设 P 是 H 到 H 的正交投影,由于 P 是连续的,故 $M^{\perp}$ 也是 H 的闭子空间. $\forall\, x \in H$,有 $x = Px + (I - P)x$,显然,$Px \in M$,$(I - P)x \in M^{\perp}$,

(下转第 8 页)

基于 Mapinfo+Arcview+Excel 的线体分形方法可以自动生成拟合线性图、拟合图的线性方程及相关系数，不仅操作简单，而且精度高.

参考文献：

[1] Guido G Z. A practical implementation of the box counting algorithm [J]. Computers & Geosciences, 1998,24(1):95-100.

[2] 朱晓华，査勇. MapInfo 与 ArcViewGIS 软件在线体分形分析中的应用[J]. 测绘信息与工程，2002,27(5):4-5.

[3] Mandeibrot B B. The fractal geometry of nature[M]. New York:Freeman,1982.

[4] 申维. 分形混沌与矿产预测[M]. 北京：地质出版社，2002.

[5] 张桂林，冯佐海，何卫军. 基于 GIS 的数字化地质填图新方法[M]. 北京：国防工业出版社，2005.

[6] 袁峰，周涛发，岳书仓. 基于 Mapinfo 的地图矢量化方法[J]. 皖西学院学报，2002,18(4):86-88.

[7] 张青峰，吴发启，王力，等. 基于 Mapinfo 专题地图数字化与制作[J]. 测绘与空间地理信息，2005,28(1):70-75.

[8] 秦其明，曹五丰，陈杉. Arcview 地理信息系统实用教程[M]. 北京：北京大学出版社，2001:108-135.

[9] 谢榕. 面向对象地理信息系统软件 Arcview 的高级应用[J]. 计算机系统应用，1998(11):58-60.

[10] 钱习，方黎. 基于 Arcview 的 Avenue 开发数据处理扩展模块[J]. 城市勘测，2004(3):39-45.

[11] Bernard Liengme. Microsoft Excel 在科研与工程中的应用[M]. 北京：中国林业出版社，2003:105-122.

（责任编辑：尹 闯 邓大玉）

（上接第5页）

由于 $M \cap M^{\perp} = \{0\}$，于是 $H = M \oplus M^{\perp}$.

定理 4 可推广到有限个两两正交闭子空间情形，故可得如下推论 4.

推论 4 设 H 是复 Hilbert 空间，H 由两两正交的闭子空间 $\{M_i\}_{i=1}^{n}$ 张成，$\{P_i\}_{i=1}^{n}$ 是从 H 到 $\{M_i\}_{i=1}^{n}$ 的正交投影，则 $P_1 + P_2 + \cdots + P_n = I$ 当且仅当 $H = M_1 \oplus M_2 \oplus \cdots \oplus M_n$.

由于 P 是沿着零空间 $N(P) = R(I-P)$ 到值域 $R(P) = N(I-P)$ 的正交投影，则由定理 3 得到推论 5 如下.

推论 5 设 H 是复 Hilbert 空间，P 是 H 到 H 的正交投影，则 $H = N(P) \oplus R(P) = R(I-P) \oplus N(I-P)$.

定理 5 $P_M + P_N$ 是正交投影当且仅当 $P_M P_N = 0$. 特别地，$P_M \oplus P_N = P_{M\oplus N}$.

证明 必要性. 设 $P_M + P_N$ 是 H 上的正交投影，则有

$$P_M + P_N = (P_M + P_N)^2 = P_M^2 + P_M P_N + P_N P_M + P_N^2, \tag{1}$$

由于 P_M 和 P_N 是 H 上的投影，则有 $P_M^2 = P_M$，$P_N^2 = P_N$. 由(1)式得

$$P_M P_N + P_N P_M = 0, \tag{2}$$

用 P_N 左乘(2)式得

$$P_N P_M P_N + P_N P_M = 0, \tag{3}$$

用 P_N 右乘(3)式得 $2P_N P_M P_N = 0$. 再由(3)式得 $P_N P_M = 0$.

充分性. 由 $P_M P_N = P_N P_M = 0$，从而得到(2)式，又推得(1)式，即 $P_M + P_N = (P_M + P_N)^2$. 因为 P_M 和 P_N 是 H 上的投影，所以 P_M 和 P_N 是自伴的，故 $P_M + P_N$ 也是自伴的. 所以 $P_M + P_N$ 是投影. 又因为 $P_M + P_N = M \oplus N$，所以有 $P_M \oplus P_N = P_{M\oplus N}$.

参考文献：

[1] Lindenstranss J, Tzafriri L. Classical banach spaces I [M]. New York:Springer-Verlag,1973.

[2] Beauzamy B. Introduction to banach spaces and their geometry [M]. North-Holland: North-Holland Mathematics Studies,1982.

[3] Taylor A E, Lay D C. Introduction to functional analysis [M]. Second Edition. New York: Springer-verlag, 1980.

[4] Kreysizig E. Introduction to functional analysis with applications[M]. New York:Springer-Verlag,1973.

[5] 夏道行. 实变函数与泛函分析：下册[M]. 北京：人民教育出版社，1979.

[6] Conway J B. A course in function analysis[M]. New York:Springer,1990.

[7] 林丽琼. 关于投影算子的等价关系[J]. 福建师范大学学报：自然科学版，2004,20(2):21-26.

[8] 虞志坚. 有关 Hilbert 空间上的投影[J]. 台州学院学报，2005,27(3):18-24.

[9] 杜乃林. 正交投影列的强收敛准则与 Galerkin 广义逆的逼近[J]. 数学学报，2007,50(1):43-54.

（责任编辑：韦廷宗）