广西科学院学报
Journal of Guangxi Academy of Sciences
2007,23(4):220～222
Vol. 23,No. 4 November 2007

关于组合算法的一些问题
Some Problems on Combinational Algorithm

苏运霖
SU Yun-lin

(梧州学院计算机与电子信息工程系,广西梧州 543002)
(Department of Computer and Electronic Information Engineering,Wuzhou University,Wuzhou,Guangxi,543002,China)

摘要:介绍几种加性和乘性字母算术(或密码数学)问题及生成结果为100的表达式的组合问题的一些成果,并提出3个问题:如何代人数字使工业化+农业化+科学化=现代数化,立党为公+执政为民=为人民服务,更快×更高×更强=奥林匹克精神成立。

关键词:组合数学　组合算法　字母算术　密码数学
中图法分类号:O157.1　**文献标识码**:A　**文章编号**:1002-7378(2007)04-0220-03

Abstract:This paper introduces some addition and multiplication alphametics (or cryptarithm) problems and some achievements generated from the combination of numbers 1,2,3,…,9 that form the result 100. Three sample questions are raised to demonstrate how to replace each Chinese character to realize the equations with the digital numbers.

Key words:combinatorics,combinatorial algorithms,alphametics,cryptarithm

组合数学是一门古老而年轻的学科。人类面临着大量的组合问题,如基因的组合问题,药品成分的配方问题,分子组合问题等等。关于组合数学的研究,仍然是人们关注的一个重要课题。本文介绍几种类似数学游戏的组合问题,供有兴趣者参考和研究。

1　同字母算术或密码数学问题

很久以前就有人提出字母算术的概念,亨利·欧内斯特·杜迪尼在1924年就提出这样一个著名问题:如果每个字母代表着不同的十进制数字,要使

```
  S E N D
+ M O R E
---------
M O N E Y
```

表示一个正确的求和,则每个字母应当分别表示什么数。要解决这个问题,必须满足2个条件:(1)这些字母的总个数不能超过10个,因为每个字母只能代表着不同的十进制数字;(2)要满足以下几个方程式,即

D+E=Y,N+R(或+1)=E,E+O(或+1)=N,S+M(或+1)=O。同时,由于M表示进位,而个位加法进位最多为1,因此已经获得M=1的解。在上述的方程中有

S+1(或+1)=10。

同理可以确定O的值,然后再确定其它字母的值。

这些类似游戏的问题,却引发人们的思考。假若要传送的是数字信息,比如是数字密码,用字母来对它们加密,这就演变成了密码问题。1931年,西蒙·瓦特里宽特就给它起了另一个名称——密码数学。

字母算术或密码数学自开创以来就得到顺速发展。开始,人们关注具有惟一解的问题。而后,开始考虑,解的个数问题。惟一解的情况,称为纯的字母算术或纯的密码数学。有的问题,不仅仅在字母这个层面上有意义,以数值解代入后仍然正确。例如VIOLIN + VIOLIN + VIOLA = TRIO + SONATA (小提琴+小提琴+小提琴=三重+合奏)。它也可以简写为2(VIOLIN) + VIOLA − TRIO − SONATA=0。

这里有9个字母,即V,I,O,L,N,A,T,R,S,少于十个可以有解。我们的目的是要对它们分别赋

收稿日期:2007-09-18
作者简介:苏运霖(1940-),男,教授,主要从事算法,分布式算法,人工智能和编译理论研究。

予0,1,2,3,4,5,6,7,8,9的值,使得上式成立。如果它有唯一解,那它是纯粹的。但这个问题不是纯粹的,因为有两个排列1764802539和3546281970都满足:

176478+176478+17640=2576+368020

和

354652+354652+35468=1954+742818。

同时,因为要满足一般的算术运算,不允许进位为零,所以

$$\begin{array}{r}7316\\+0823\\\hline 08139\end{array}\text{或}\begin{array}{r}5731\\+0647\\\hline 06378\end{array}\text{或}\begin{array}{r}6524\\+0735\\\hline 07259\end{array}$$

或$\begin{array}{r}2817\\+0368\\\hline 03185\end{array}$都不是正确答案。

在亨利·杜德尼的影响下,字母算术出现一系列的新结果。我们以下列举其中一些较为著名的结果。

1968年,威里·恩格林给出SATURN+URANUS+NEPTUNE+PLUTO=PLANETS(土星+天王星+海王星+冥王星=行星)。

1972年,他又给出DCLIX+DLXVI=MCCXXV这是罗马数字下的659+566=1225,但现在要求的是

$$\begin{array}{l}\text{DCLIX}\\+\text{DLXVI}\\\hline \text{MCCXXV}\end{array}。$$

1977年,彼得·麦克唐纳德给出ZEROS+ONES=BINARY(诸0+诸1=二进制)。

1977年,尼均·赫尔曼给出EARTH+AIR+FIRE+WATER=NATURE(地球+空气+火+水=自然)。同一年,巴克利·迈克尔·R·W给出COUPLE+COUPLE=QUARTET(对偶+对偶=四个)。1978年,文尼康比·罗伯特(Vinnicombe Robert)提出FISH+N+CHIPS=SUPRER(鱼+和+土豆条=夜宵),这是澳大利亚和新西兰人的大众食谱。

其它有名的结果还有SEND+A+TAD+MORE=MONEY(寄+多一点=钱)。

一个更复杂的结果AN+ACCELERATING+INFERENITAL+ENGINEERING+TALE+ELITE+GRANT+FEE+ET+CETERA=ARTIFICIAL+INTELLIGENCE(一个+加速的+推理的+工程+叙述+允许+费用+等等=人工+智能)以及HARDY+NESTS=NASTY+HERDS(强壮的+鸟巢=肮脏的+兽群)。

一个比较特殊的结果NIHAO±KAUAI±OAHO±MOLAKAI±CANAI±MAUI±HAWAII=0,它对于±法,都具有唯一的解。

依照以上的文字算术,我们也可以提出问题,如何代入数字,使

工业化+农业化+科学化=现代化

成立。这里,出现的汉字有{工、农、业、化、科、学、现、代},它们可以用{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9}来代入。显然,这个解不会是唯一的,因而它也就不是纯粹的。

如何代人数字使

立党为公+执政为民=为人民服务,

这里有{立、党、为、公、执、政、民、人、服、务}共10个字,因此它是有唯一解的。

我们说一个整数n的分划是形如

$$n = n_1 + n_2 + \cdots + n_t$$

的一个表达式,其中$n_1 \geqslant n_2 \geqslant \cdots \geqslant n_t > 0$。这样一个分划说是双重正确的,如果$\alpha(n) = \alpha(n_1) + \alpha(n_2) + \cdots + \alpha(n_t)$是一个纯粹的字母算术,其中$\alpha(n)$是在某种语言之下$n$的名称。这仅对于以拼音生成的语言才可能。1947年,阿兰·韦恩在美国数学年鉴54期,38卷,第4120-414页上,给出了双重正确的一个分划TWENTY=SEVEN+SEVEN+SIX(20=7+7+6),这里有(T,W,E,N,Y,S,E,V,I,X)共10个字母,而且由两个五个字母的数和一个三个字母的数,形成六个字母的和,是可能的。但如果以拼音表示成

ERSHI=QI+QI+LIU,

显然不可能有解,因为左边是一个五位数,右边是两个二位数,一个三位数。它们之和无论如何也不可能是五位数,因此它无解。

韦恩还给出结果EIGHTY=FIFTY+TWENTY+NINE+ONE(80=50+20+9+1),这也是双重正确的。

在分划上,存在数学上和在字母算术上都正确的情况,而项数两边都大于1。下面是一个例子

TWELVE+NINE+TWO=ELEVEN+SEVEN+FIVE(12+9+2=11+7+5)。

在这个式子里,有{T,W,E,L,V,N,I,O,S,F}共10个字母,因此可以和10个数字建立一一对应。

以上介绍的算术运算是加法,因而称为加性字母算术。如果把它改成为乘法,就称为乘性字母算术。乘性字母算术,最早的结果也是由亨利·杜德尼于1929年给出,TWO×TWO=SQUARE(2×2=

平方）。

1970 年，威里·恩格林给出 HIP×HIP＝HURRAY（呼声×呼声＝欢呼声）。1981 年，巴威尔·布里安给出 PI×R×R＝AREA（πR^2＝面积）。1995 年，日本人节ケ原伸给出除法的字母算术 NORTH/SOUTH ＝ EAST/WEST（北/南 ＝ 东/西）。他还提出 A/BC＋D/EF＋G/HI＝1，其中{A，…，Z}＝{1，…，9}。

韦恩于 2003 年又给出 NAUGHT×NAUGHT＝ZERO×ZERO×ZERO（无×无＝零×零×零）。对于乘性文字算术，我们也可以给出更快×更高×更强＝奥林匹克精神。这里共有{更，快，高，强，奥，林，匹，克，精，神}10 个汉字，试确定出它们与 10 个数字的对应。

2　生成结果为 100 的表达式的组合问题

亨利·杜德尼除了提出字母算术之外，还提出了生成结果为 100 的表达式的组合。这个问题的提法是，在 1，2，3，4，5，6，7，8，9 中间，如何通过插入算术运算符和可能还有括号，使所得到的表达式以 100 为值。例如

100＝1＋2×3＋4×5－6＋7＋8×9，

这里，没有使用任何括号。如果允许使用括号，则有

100＝（1＋2－3－4）×（5－6－7－8－9）＝（（1/（（2＋3）/4－5＋6））×7＋8）×9，

这里，还有一个先决条件，即 1 至 9 的顺序不变。算术运算符和括号只允许在它们当中进行组合。因此，虽然有下列的文法[1]来描述表达式文法，但它并不能表达上述先决条件。这应归于属性文法[2]。

＜表达式＞→＜数＞|＜和＞|＜积＞|＜商＞，

＜和＞→＜项＞＋＜项＞|＜项＞－＜项＞|＜和＞＋＜项＞|＜和＞＜项＞，

＜项＞→＜数＞|＜积＞|＜商＞，

＜积＞→＜因子＞×＜因子＞|＜积＞×＜因子＞|（＜商＞）×＜因子＞，

＜商＞→＜因子＞/＜因子＞|＜积＞/＜因子＞|（＜商＞）/＜因子＞，

＜因子＞→＜数＞|（＜和＞），

＜数＞→＜数字＞。

按照乔姆斯基的文法定义[3]，上述文法是一个上下文无关文法，它规定了数是数字，但并没有规定数字是有序的。因此这个文法有其局限性。对于非上下文无关文法的特性，它都无法表示，要用属性文法对它进行补充。

此外，在这个文法中，只允许数是一位数字，所以可能的组合个数有限。如果我们把数的定义改成为

＜数＞→＜数字＞|＜数＞＜数字＞，

就可以得到更多的 100 的表达方式。以下是两种可能性：100＝（1/（2－3＋4））×567－89，或者 100＝12＋（－3＋4＋5）/6＋78＋9。

进一步，我们可以考虑，允许数是小数，为此对数的定义作如下修改

＜数＞→＜数字串＞|＜数字串＞，

＜数字串＞→＜数字＞|＜数字＞＜数字串＞，

于是我们可以有 100＝（.1－2－34×.5）/（.6－.789）.

关于这些表达式的组合，实际上已经有了相当深入的结果，我们已经知道它们所有可能的表达的总个数。如果我们以一个二叉数来表达一个表达式，而且以内部节点表示运算符号，包括括号或小数点，而以外部节点表达数字，且数字的顺序为 1，2，…，9。此外，由给定的文法所强加的限制是，如果 $r_j=k>0$，则在节点 j 处的运算符为 ＋ 或 －，当且仅当在节点 k 的运算符是 × 或 /。因此，具有 n 个叶（即 n 个数字）的一棵树的所有可能的总数为 2^nS_{n-1}。这里 S_n 为施罗德数，当 $n=9$ 时，总数为 10646016。而其中，恰好有 1640 个可产生解。其中只有一个表达式，即 1＋2/（（3－4）/（5＋6）－（7－8）/9）不用乘法来做这件事。它们中的 20 个，例如（（（1－2）/（3/4）×5－6））×7＋8）×9，要求 5 对括号，仅有 15 个不要求任何括号。

参考文献：

[1]　KNUTH D E. 计算机程序设计艺术：第 4 卷，第 2 册[M]. 苏运霖，译. 北京：机械工业出版社，2006

[2]　KNUTH D E. 计算机程序设计艺术：第 4 卷，第 4 册[M]. 苏运霖，译. 北京：机械工业出版社，2006

[3]　苏运霖. 编译程序原理[M]. 北京：机械工业出版社，2007.

（责任编辑：尹　闯）