几种特殊图的填充数*
The Fill-in Number of Special Graphs

韦 新[1],邓天炎[1],罗海鹏[2],黎贞崇[2]
WEI Xin[1],DENG Tian-yan[1],LUO Hai-peng[2],LI Zhen-chong[2]

(1. 广西师范学院数学与计算机科学系,广西南宁 530001;2. 广西科学院,广西南宁 530007)

(1. Department of Mathematics and Computer Science,Guangxi Teachers Education University, Nanning,Guangxi,530001,China;2. Guangxi Academy of Sciences,Nanning,Guangxi,530007, China)

摘要:应用图的最优填充分解定理和局部最优填充定理,得到了书本图 B_m、方型网图 $F(m;n)(m=1,2,3)$ 和蛛网图 $W(m,n)(m=1;n=3)$ 的填充数表达式分别为:$F(B_m)=m$,$F(F(1;n))=n$,$F(F(2;n))=4n-3$,

$$F(F(3;n))=\begin{cases}3,n=1,\\9,n=2,\\14,n=3.\end{cases}\quad F(W(1,n))=n-3,F(W(m,3))=3(m-1).$$

关键词:填充 分解定理 图

中图法分类号:O157.5 **文献标识码**:A **文章编号**:1002-7378(2007)04-0217-03

Abstract:By using the decomposition theorem and the local reductive elimination for the fill-in of graphs,we obtain the fill-in number of Books graph B_m, Mesh graph $F(m;n)(m=1,2,3)$ and Cobweb-chart $W(m,n)(m=1,n=3)$,$F(B_m)=m$,$F(F(1;n))=n$,$F(F(2;n))=4n-3$,

$$F(F(3;n))=\begin{cases}3,n=1,\\9,n=2,\\14,n=3.\end{cases}\quad F(W(1,n))=n-3,F(W(m,3))=3(m-1).$$

Key words:fill-in,decomposition theorem,graph

在求解一个大型线性方程组时,如果运用Gauss消去法或Cholesky分解算法,那么运算速度与矩阵的稀疏程度(即非零元的多少)有紧密的关系.而在消去过程中,有的零元素会变为非零元素,这称之为填充.为了维持正定对称矩阵的稀疏性以减少计算量和存储量,就要求确定适当的消去顺序,使填充的非零元尽可能少,这称为矩阵的填充优化问题.由于正定对称矩阵的结构与图相对应,所以对矩阵的填充问题可转化为对图的填充[1~3]问题.一般图的填充问题被证明是NP-完全的[4],也就是说,对一般图的填充问题目前还没有较好的算法,而对于一些具有特殊结构的图,例如格子图,可以利用最小填充的分解定理与约化准则,将图分解为结构相对简单的子图,然后再分别求其最小填充数及最优标号[5].

1 预备知识

给定一个简单图 $G=(V,E)$,其中 $|V|=n$,顶点 $v\in V$ 的邻集 $N(v)=\{u\in V|u\neq v,(u,v)\in E\}$.任一双射 $f:V\to\{1,2,\cdots,n\}$ 称为图 G 的一个顶点标号.$v_i=f^{-1}(i)(i=1,2,\cdots,n)$ 便是图 G 的一个顶点顺序.

把一个图的顶点按如下步骤消去.

步骤1:消去顶点 v_1 及其相关联的边.

步骤2:增加边,使其邻集 $N(v_1)$ 中的顶点两两相邻,这样得到的图记为 G_1.

步骤3:在 G_1 中按步骤1再消去顶点 v_2,依此类推.

其中步骤2使其邻集 $N(v_i)$ 中顶点两两相邻所增加的边称为填充边.记这些边所组成的集合为 $E_f(v_i)$.

收稿日期:2007-09-20
作者简介:韦 新(1982-),男,硕士研究生,主要从事图论研究。
*国家自然科学基金项目(60563008),广西自然科学基金项目(桂科自0728051)资助。

定义 1.1　图 G 在标号 f 之下的填充数为 $f(G,f)=\sum_{i=1}^{n}|E_f(v_i)|$. 图 G 的最小填充数为 $F(G)=\min_{f} F(G,f)$. 使得 $F(G)=F(G,f)$ 的标号称为最优标号，这时，$\{E_f(v_i)\}$ 称为图 G 的一个最优填充.

引理 1.1[1]　设 S 为图 G 的完全点割集，G-S 的各分支的顶点集为 $V_1,V_2,\cdots,V_k(k\geqslant 2)$，并设 $H_i=G[V_iYS](i=1,2,\cdots,k)$，则 $F(G)=\sum_{i=1}^{k}F(H_i)$.

引理 1.2[3]　设图 G 的连通度为 k，且 T 是一个点割集，$|T|=k$，若 G-T 各分支的顶点集为 $V_1,V_2,\cdots,V_m(m\geqslant 2)$，且 $G[T]$ 的补图的每一个非平凡分支为星 $K_{1,r}$，则 $F(G)=\sum_{i=1}^{m}F(H_i)+|E(T)|$. 其中，$H_i=G[V_iYT]+E(T)(1\leqslant i\leqslant m)$.

引理 1.3[6]　设 G 是 k-连通图，$d_G(v)=k$. 若存在 $x\in N(v)$，$N(v)\backslash\{x\}$ 为 G 的一个团，$F(G)=F(G-v+E_0)+|E_0|$，其中 $E_0=\{xy\in E(\bar{G})\,|\,y\in N(v)\backslash\{x\}\}$. 并且若 F_0 为 $G-v+E_0$ 的一个最小填充，那么 F_0YE_0 也是 G 的最小填充.

一些简单的结论：

(i)$F(C_n)=n-3$，(ii)$F(W_n)=n-3$，(iii)$F(P_n)=0$，(iv)$F(K_n)=0$，(v)$F(S_m)=0$，S_m 是具有 $m+1$ 个顶点的星图，(vi)$F(I_r(C_n))=n-3$，$I_r(C_n)$ 表示在圈 C_n 的每个顶点上增加 r 条悬挂边所组成的图.

2　主要结果

定义 2.1　书本图 B_m 是具有 $m+1$ 个顶点的星图 S_m 与 P_2 的乘积，记为 $S_m\times P_2$.

定理 2.1　$F(B_m)=m$.

证明　取点割集 $S=\{u,v\}$，S 刚好构成 B_m 的一个完全点割集，运用引理 1.1 把 B_m 分解 m 次，得到 m 个 C_4. 由 $F(C_n)=n-3$，可得 $F(B_m)=m$.

定义 2.2　蛛网图 $W(m,n)$ 是指具有同心 x_0 的 m 个圈 C_n，将 x_0 与每个 C_n 上相应点连线，然后在外层 C_n 的每点再增加一条悬挂边而得到，如图1所示。

定理 2.2　$F(W(1,n))=n-3$.

证明　由引理 1.3 先消去度为 2 的 n 个顶点，得到的图刚好为一个轮图 W_n. 由已知结论(ii)，$F(W(1,n))=F(W_n)=n-3$.

定理 2.3　$F(W(m,3))=3(m-1)$.

证明　第 1 步：先消去 n 个度为 1 的顶点，得到

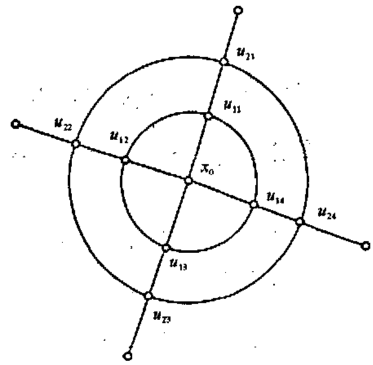

图 1　$W(2,4)$

的图记为 D_n.

第 2 步：取第一个 C_3 上的 3 个顶点作为一个点割集，显然，这是一个完全点割集，根据引理 1.1，对 D_n 进行分解，得到 1 个 K_1+C_3 与 1 个 D_{n-1}.

第 3 步：接着以第 2 个到第 $m-1$ 个 C_3 上的顶点依次作为点割集，这些都为完全点割集，运用引理 1.1，对 D_{n-1} 逐步进行分解，得到 $m-1$ 个 $P_2\times C_3$. 分解完成后，总共得到 $m-1$ 个 $P_2\times C_3$ 与 1 个 K_1+C_3. 经观察并计算，要使 $P_2\times C_3$ 成为一个弦图，需添加的最少填充边为 3 条，再由引理 1.1 可知

$$F(W(m,3))=(m-1)F(P_2\times C_3)+F(K_1+C_3)=3(m-1).$$

定义 2.3[7]　一阶网图 $F(1;n)$ 是 n 个圈 C_4 顺次串接所得，其中 $F(1;n)$ 中任意 2 个串接点均不相邻，且 $F(1;n)$ 每个点的度均不超过 4.

定义 2.4[7]　n 阶方型网图 $F(m;n)$ 是 n 个一阶网图 $F(1;n)$ 按二类点与一类点对应顺次串接所得到的图. 二阶方型网图如图 2 所示.

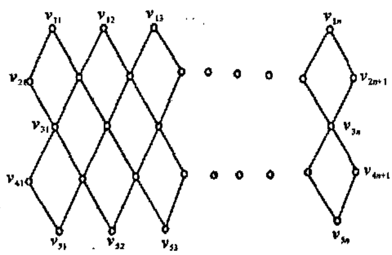

图 2　$F(2;n)$

定理 2.4　$F(F(1;n))=n$.

证明　由引理 1.2 逐个消去度为 2 的顶点. 由于每消去一个方型网格的度顶点都得到 1 条填充边，而一阶网图是由 n 个方型网格串接得到的，所以最后得到 n 条填充边.

定理 2.5　$F(F(2;n))=4n-3$.

证明　第 1 步：消去图中所有的度顶点，得到

$2n$ 条填充边.

第 2 步:继续消去图中的度顶点,得到 2 条填充边.所得到的图记为 D_n.

第 3 步:利用引理 1.1,对 D_n 先消去顶点 v_{22},接着消去顶点 v_{42},得到 2 个 K_1+C_3,1 个 D_{n-1} 与 2 条填充边.依此类推,对 D_{n-1} 继续分解,共得到 $2(n-3)$ 个 K_1+C_3,1 个 K_1+C_4 与 $2(n-3)$ 条填充边. $F(F(2;n))=2n+2+2(n-3)+1=4n-3$.

定理 2.6 $F(F(3;n))=\begin{cases}3, n=1,\\ 9, n=2,\\ 14, n=3.\end{cases}$

证明 1° 当 $n=1$ 时, $F(3;1)$ 为具有 3 个方型网格的一阶网图,结论显然成立.

2° 当 $n=2$ 时,把 $F(3;2)$ 的所有 2 度顶点消去,得到 8 条填充边与 1 个 K_1+C_4.由于 $F(K_1+C_4)=1$,所以 $F(F(3;2))=8+1=9$.

3° 当 $n=3$ 时,与 2° 证明方法类似,利用引理 1.1 先消去所有的 2 度顶点,接着消去首末两行的 4 个 3 度顶点,得到的图记为 D_1,经观察,给 D_1 加上 2 条边,就能使其成为一个弦图.故 $F(F(3,3))=8+4+2=14$.

参考文献:

[1] 李文权,林诒勋.图的最小填充的分解定理[J].应用数学与计算数学学报,1994,8(1):39-46.

[2] 原晋江.图的填充和运算[J].中国科学:A 辑,1994,24(10):1021-1028.

[3] 林诒勋.图的填充问题的约化[J].应用数学,2000,(3):1-5.

[4] YANNAKAKIS M. Computing the minimum fill-in is np-complete[J]. SLAM J Alg-Disc Math,1981,1(1):77-79.

[5] 冯爱芬.几类特殊图的最优填充[J].河南科技大学学报:自然科学版,2004,2:93-96.

[6] YUAN J J. A local reductive elimination for the fill-in of graphs[J]. Disc Maths,1995,147:321-327.

[7] 卜长江,高振滨,齐玉梅.网图的优美性[J].哈尔滨工程大学学报,1995,3:102-105.

(责任编辑:尹　闯)

(上接第 216 页)

仿照定理 1 及定理 2 可以给出 $\bigcup_{i=1}^{n} m_i C_4^2$ 的奇优美标号和次奇强协调标号.

参考文献:

[1] JOSEPH A GALLIAN. A dynamic survey of graph labeling[J]. The Electronic Journal of Combinatorics,2007,6(14):1-180.

[2] GALLIAN J A. A survey recent results,conjectures and open problems in tabeling graphs[J]. Graph Theory,1989,13(4):491-504.

[3] 宋庆华,段滋明,朱颜风.图 $C_{m-1}\cup C_m$ 的优美性[J].山东科技大学学报:自然科学版,2004(2):65-67.

[4] CHOUDUM S A,Pitchai muthu kishore graceful labelling of paths and cycles[J]. Discrete Mathematics,1999,206(1-3):105-117.

[5] 宋庆华. $C_{4k}\cup P_n$ 的优美性[J].华东交通大学学报,2006,23(1):139-142.

[6] 潘伟,杨丽贤,刘铁军.关于 $K_{m,n}$ 并图的优美性[J].长春大学学报,2004(2):65-67.

[7] 毕双艳,李秀芬,路线.图的 k- 优美性及算术性[J].吉林大学自然科学学报,1994(2):19-22.

[8] 杨显文,潘伟.关于 $\bigcup_{i=1}^{n} m_i C_4^2$ 的优美性[J].吉林大学学报:信息科学版,2004,22(2):160-163.

(责任编辑:尹　闯)