广西科学院学报 2007,23(4):215~216,219
Journal of Guangxi Academy of Sciences Vol. 23,No. 4 November 2007

无交并图 $\bigcup_{i=1}^{n} m_iC_4^2$ 的奇优美性及次奇强协调性*

The Odd Gracefulness and Weak Odd Strong Harmoniousness of Graph Disjoint Union $\bigcup_{i=1}^{n} m_iC_4^2$

孔令峰[1],苏文龙[2],罗海鹏[3],黎贞崇[3],何建东[3]
KONG Ling-feng[1],SU Wen-long[2],LUO Hai-peng[3],LI Zhen-chong[3],HE Jian-dong[3]

(1. 广西师范学院数学与计算机科学系,广西南宁 530001;2. 梧州学院,广西梧州 543002;3. 广西科学院,广西南宁 530007)
(1. Department of Mathematics and Computer Science,Guangxi Teachers Education University, Nanning,Guangxi,530001,China;2. Wuzhou University,Wuzhou,Guangxi,543002,China;3. Guangxi Academy of Sciences,Nanning,Guangxi,530007,China)

摘要:定义了次奇强协调标号,并证明无交并图 $\bigcup_{i=1}^{n} m_iC_4^2$ 是奇优美的和次奇强协调的.

关键词:无交并图 奇优美性 次奇强协调性
中图法分类号:O157.5;TP312 **文献标识码**:A **文章编号**:1002-7378(2007)04-0215-02

Abstract:This paper defines weak odd strong harmonious labeling and proves that disjoint union graphs $\bigcup_{i=1}^{n} m_iC_4^2$ are odd graceful and weak odd strong harmony.

Key words:disjoint union graph,odd gracefulness,weak odd strong harmoniousness

目前图的标号研究已经取得了很多成果[1],自 1975 年 A. kotzig[2] 考虑了两个图之并(即不连通图)的优美性之后,人们在不连通图方面做了大量的研究.研究范围主要有圈图与圈图之并[3],路图与圈图之并[4,5],完全图与完全图之并[6],圈图与星图之并[7]等等.文献[8]中作者证明了图 $\bigcup_{i=1}^{n} m_iC_4^2$ 是 (kd, d) - 优美图,本文在此基础上证明了图 $\bigcup_{i=1}^{n} m_iC_4^2$(当 $m_i = i$,即 $\bigcup_{i=1}^{n} m_iC_4^2 = C_4^2 \cup 2C_4^2 \cup 3C_4^2 \cup \cdots \cup nC_4^2$))是奇优美的和次奇强协调的,并将此结论推广到 m_i 取任何自然数的情形.

定义 1 对于自然数 m_i, n,$\bigcup_{i=1}^{n} m_iC_4^2$ 表示 n 个 $m_iC_4^2$ 的无交并图,其中 $m_iC_4^2$ 表示由 m_i 个 C_4 圈且恰有两条公共边构成的图(当 $m_i = m$ 时 $m_iC_4^2$ 如图 1).

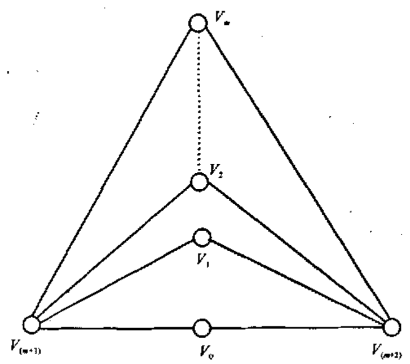

图 1 $m_iC_4^2(m_i = m)$

定义 2[1] 对于简单图 $G(V,E)$,如果存在一个单射 $f:V(G) \to \{0,1,2,\cdots,2|E(G)|-1\}$,使得对所有的边 $e = uv \in E(G)$,由 $f^*(uv) = |f(u) - f(v)|$ 导出的映射 $f^*:E(G) \to \{1,3,5,\cdots,2|E(G)|-1\}$ 是一个双射,则称 G 为奇优美的,f 为 G 的奇优美标号.

定义 3 对于简单图 $G(V,E)$($G(V,E)$ 不是树),如果存在一个单射 $f:V(G) \to \{0,1,2,\cdots,2|E(G)|-1\}$,使得对所有的边 $e = uv \in E(G)$,由

收稿日期:2007-09-01
作者简介:孔令峰(1982-),女,硕士研究生,主要从事组合数学研究。
* 国家自然科学基金项目(60563008),广西自然科学基金项目(桂科自 0728051)资助.

$f^*(uv)=f(u)+f(v)$ 导出的映射 $f^*:E(G)\to\{1,3,5,\cdots,2|E(G)|-1\}$ 是一个双射，则称 G 为次奇强协调的，f 为 G 的次奇强协调标号.

1 奇优美标号的算法

对于无交并图 $\bigcup_{i=1}^{n}m_iC_4^2(m_i=i)$，易知 $|V(\bigcup_{i=1}^{n}m_iC_4^2)|=\frac{n(n+7)}{2}$，$|E(\bigcup_{i=1}^{n}m_iC_4^2)|=n(n+3)$ 对较小的 n 用遍历算法探索奇优美标号并寻找标号的规律，步骤如下：

步骤1：输入 n；

步骤2：在 $0,1,\cdots,2n(n+3)-1$ 中选取 $\frac{n(n+7)}{2}$ 个数 $a_0,a_1,\cdots,a_{\frac{n(n+7)}{2}-1}$；

步骤3：给出顶点 v_i 到 a_i 的一个对应；

步骤4：计算图中所有边的值，如果某一条边的值为偶数或者某一条边的值和前面计算的边的值重复了，如果 v_i 到 a_i 还有其它对应，转到步骤3，否则，如果从 $2n(n+3)$ 个数中选取 $\frac{n(n+7)}{2}$ 个数还有其它方法，则转到步骤2，否则，结束；

步骤5：找到一个奇优美标号，输出所有顶点的标号值，转到步骤3，给出顶点 v_i 到 a_i 的下一个对应，寻找下一个奇优美标号法.

根据算法编写程序，上机计算，对较小的 n 找出了奇优美标号的规律，根据此规律，n 较大时也符合奇优美标号的规律，这样就找出了它的奇优美标号.

应用该算法可以类似地找出无交并图 $\bigcup_{i=1}^{n}m_iC_4^2(m_i=i)$ 的次奇强协调标号.

2 定理及证明

如图2所示，记无交并图 $\bigcup_{i=1}^{n}m_iC_4^2(m_i=i)$ 的第 j 个分支的顶点为 $v_0^{(j)},v_1^{(j)},\cdots,v_{j+2}^{(j)}$，其中公共边上的三个顶点标号为 $v_{j+2}^{(j)},v_0^{(j)},v_{j+1}^{(j)}$，其它顶点由下至上分别为 $v_1^{(j)},v_2^{(j)},\cdots,v_j^{(j)}$.

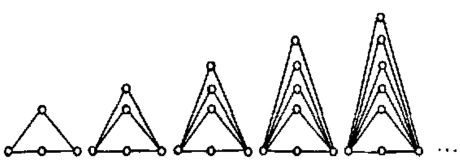

图2 $\bigcup_{i=1}^{n}m_iC_4^2(m_i=i)$

定理1 无交并图 $\bigcup_{i=1}^{n}m_iC_4^2(m_i=i)$ 为奇优美的.

证明 给出图 $\bigcup_{i=1}^{n}m_iC_4^2(m_i=i)$ 的顶点标号如下：

$f(v_i^{(1)})=4i,i\in\{0,1\}$；

$f(v_i^{(j)})=f(v_{j-1}^{(j-1)})-2+4i$，这里 $j\in\{2,\cdots,n\},i\in\{0,1,2,\cdots,j\}$；

$f(v_{j+2}^{(j)})=2n(n+3)-1-6(j-1),j\in\{1,2,\cdots,n\}$；

$f(v_{j+1}^{(j)})=2n(n+3)-3-6(j-1),j\in\{1,2,\cdots,n\}$.

对应边的标号 f^* 为：

$f^*(v_i^{(j)}v_{j+1}^{(j)})=2n(n+3)-3-6(j-1)-f(v_{j-1}^{(j-1)})+2-4i=2n(n+3)-6(j-1)-f(v_{j-1}^{(j-1)})-1-4i,j=2,3,\cdots,n,i=0,1,\cdots,j$；

$f^*(v_i^{(j)}v_{j+2}^{(j)})=2n(n+3)-1-6(j-1)-f(v_{j-1}^{(j-1)})+2-4i=2n(n+3)-6(j-1)-f(v_{j-1}^{(j-1)})-4i+1,j=2,3,\cdots,n,i=0,1,\cdots,j$；

$f^*(v_i^{(1)}v_{j+1}^{(1)})=2n(n+3)-3-4i,i=0,1$；

$f^*(v_i^{(1)}v_{j+2}^{(1)})=2n(n+3)-1-4i,i=0,1$.

当 i 走遍 $0,1$ 时，$f^*(v_i^{(1)}v_{j+1}^{(1)})$ 走遍 $\{2n(n+3)-3,2n(n+3)-7\}$；$f^*(v_i^{(1)}v_{j+2}^{(1)})$ 走遍 $\{2n(n+3)-1,2n(n+3)-5\}$. 当 i 走遍 $0,1,\cdots,j$ 中的元素，j 走遍 $2,3,\cdots,n$ 中的元素时，$f^*(v_i^{(j)}v_{j+1}^{(j)})$ 走遍 $\{1,5,9,\cdots,2n(n+3)-11\}$；$f^*(v_i^{(j)}v_{j+2}^{(j)})$ 走遍 $\{3,7,11,\cdots,2n(n+3)-9\}$.

显然 f^* 为 $E(\bigcup_{i=1}^{n}m_iC_4^2(m_i=i))$ 到 $\{1,3,5,\cdots,2n(n+3)-1\}$ 的双射，所以无交并图 $\bigcup_{i=1}^{n}m_iC_4^2(m_i=i)$ 为奇优美的.

定理2 无交并图 $\bigcup_{i=1}^{n}m_iC_4^2(m_i=i)$ 为次奇强协调的.

证明 给出无交并图 $\bigcup_{i=1}^{n}m_iC_4^2(m_i=i)$ 顶点标号如下：

$f(v_i^{(1)})=4i,i\in\{0,1\}$；

$f(v_i^{(j)})=f(v_{j-1}^{(j-1)})-2+4i$，这里 $j\in\{2,\cdots,n\},i\in\{0,1,2,\cdots,j\}$；

$f(v_{j+2}^{(j)})=1+6(j-1),j\in\{1,2,\cdots,n\}$；

$f(v_{j+1}^{(j)})=3+6(j-1),j\in\{1,2,\cdots,n\}$.

同理定理1的证明，显然，在此顶点标号下无交并图 $\bigcup_{i=1}^{n}m_iC_4^2(m_i=i)$ 为次奇强协调的.

推论 当 m_i 为任意自然数时，无交并图 $\bigcup_{i=1}^{n}m_iC_4^2$ 是奇优美的、次奇强协调的.

（下转第219页）

$2n$ 条填充边.

第 2 步:继续消去图中的度顶点,得到 2 条填充边.所得到的图记为 D_n.

第 3 步:利用引理 1.1,对 D_n 先消去顶点 v_{22},接着消去顶点 v_{42},得到 2 个 K_1+C_3,1 个 D_{n-1} 与 2 条填充边.依此类推,对 D_{n-1} 继续分解,共得到 $2(n-3)$ 个 K_1+C_3,1 个 K_1+C_4 与 $2(n-3)$ 条填充边. $F(F(2;n))=2n+2+2(n-3)+1=4n-3$.

定理 2.6 $F(F(3;n))=\begin{cases}3, n=1,\\ 9, n=2,\\ 14, n=3.\end{cases}$

证明 1° 当 $n=1$ 时,$F(3;1)$ 为具有 3 个方型网格的一阶网图,结论显然成立.

2° 当 $n=2$ 时,把 $F(3;2)$ 的所有 2 度顶点消去,得到 8 条填充边与 1 个 K_1+C_4.由于 $F(K_1+C_4)=1$,所以 $F(F(3;2))=8+1=9$.

3° 当 $n=3$ 时,与 2° 证明方法类似,利用引理 1.1 先消去所有的 2 度顶点,接着消去首末两行的 4 个 3 度顶点,得到的图记为 D_1,经观察,给 D_1 加上 2 条边,就能使其成为一个弦图.故 $F(F(3,3))=8+4+2=14$.

参考文献:

[1] 李文权,林诒勋.图的最小填充的分解定理[J].应用数学与计算数学学报,1994,8(1):39-46.

[2] 原晋江.图的填充和运算[J].中国科学:A 辑,1994,24(10):1021-1028.

[3] 林诒勋.图的填充问题的约化[J].应用数学,2000,(3):1-5.

[4] YANNAKAKIS M. Computing the minimum fill-in is np-complete[J]. SLAM J Alg-Disc Math,1981,1(1):77-79.

[5] 冯爱芬.几类特殊图的最优填充[J].河南科技大学学报:自然科学版,2004,2:93-96.

[6] YUAN J J. A local reductive elimination for the fill-in of graphs[J]. Disc Maths,1995,147:321-327.

[7] 卜长江,高振滨,齐玉梅.网图的优美性[J].哈尔滨工程大学学报,1995,3:102-105.

(责任编辑:尹 闯)

(上接第 216 页)

仿照定理 1 及定理 2 可以给出 $\bigcup_{i=1}^{n} m_i C_4^2$ 的奇优美标号和次奇强协调标号.

参考文献:

[1] JOSEPH A GALLIAN. A dynamic survey of graph labeling[J]. The Electronic Journal of Combinatorics,2007,6(14):1-180.

[2] GALLIAN J A. A survey recent results,conjectures and open problems in tabeling graphs[J]. Graph Theory,1989,13(4):491-504.

[3] 宋庆华,段滋明,朱颜风.图 $C_{m-1}\cup C_m$ 的优美性[J].山东科技大学学报:自然科学版,2004(2):65-67.

[4] CHOUDUM S A,Pitchai muthu kishore graceful labelling of paths and cycles[J]. Discrete Mathematics,1999,206(1-3):105-117.

[5] 宋庆华.$C_{4k}\cup P_n$ 的优美性[J].华东交通大学学报,2006,23(1):139-142.

[6] 潘伟,杨丽贤,刘铁军.关于 $K_{m,n}$ 并图的优美性[J].长春大学学报,2004(2):65-67.

[7] 毕双艳,李秀芬,路线.图的 k- 优美性及算术性[J].吉林大学自然科学学报,1994(2):19-22.

[8] 杨显文,潘伟.关于 $\bigcup_{i=1}^{n} m_i C_4^2$ 的优美性[J].吉林大学学报:信息科学版,2004,22(2):160-163.

(责任编辑:尹 闯)