广西科学院学报
Journal of Guangxi Academy of Sciences
2007,23(3):150~152
Vol. 23,No. 3 August 2007

稀疏过程在带干扰的多险种风险模型中的应用

The Applications of Thinning Process in the Multiple Line Risk Model Perturbed by Diffusion

方世祖[1,2],王志攀[1],张春梅[1]
FANG Shi-zu[1,2],WANG Zhi-pan[1],ZHANG Chun-mei[1]

(1. 广西大学数学与信息科学学院,广西南宁 530004;2. 西安交通大学理学院,陕西西安 710049)
(1. School of Mathematics and Information Science, Guangxi University, Nanning,Guangxi, 530004,China;2. School of Science,Xi'an Jiaotong University,Xi'an,Shanxi,710049,China)

摘要:利用 Poisson 过程在随机选择下的不变性,讨论带干扰的索赔为稀疏过程的多险种风险模型的破产概率,并证明 Lundberg 不等式 $\Psi(u) \leqslant e^{-Ru}$ 和破产概率的一般公式 $\Psi(u) = \dfrac{e^{-Ru}}{E[\exp(-RR(T_u))|T_u < \infty]}$ 成立.

关键词:风险模型 稀疏过程 复合 Poisson 过程 Lundberg 不等式 破产概率 调节系数
中图法分类号:O212 **文献标识码**:A **文章编号**:1002-7378(2007)03-0150-03

Abstract: By using the invariance of the Poisson premium process in stochastic selection, the article discusses perturbed claims are ruin probability of the multiple line risk model in thinning process. The Lundberg inequality $\Psi(u) \leqslant e^{-Ru}$ and the common formula for the ruin probability: $\Psi(u) = \dfrac{e^{-Ru}}{E[\exp(-RR(T_u))|T_u < \infty]}$ are proved.

Key words: risk model, thinning process, compound Poisson process, Lundberg inequality, ruin probability, adjustment coefficient

设(Ω,F,P)为一完备概率空间,以下所遇的随机变量皆为该空间的随机变量,经典风险模型[1~3]为

$$U(t) = u + ct - \sum_{k=1}^{N(t)} X_k, \quad (1)$$

其中 $u \geqslant 0, c > 0$ 均为常数,u 表示保险公司的初始资金,c 表示保险公司单位时间征收的保险费率;$N(t)$ 表示至时刻 t 为止发生的索赔次数,它是参数为 λ 的齐次 Poisson 过程;$\{X_k, k \geqslant 1\}$ 为非负独立同分布随机变量序列且假定 $\{N(t), t \geqslant 0\}$ 与 $\{X_k, k \geqslant 1\}$ 相互独立.

稀疏过程在风险理论中有着重要的应用[4~8].例如在文献[4]中,考虑以下的风险模型:

$$U^p(t) = u + \sum_{i=1}^{M(t)} c_i - \sum_{k=1}^{M^p(t)} Y_k = u + S^p(t), \quad (2)$$

其中 u 的意义与模型(1)相同,$\{M(t), t \geqslant 0\}$ 是强度为 λ 的齐次 Poisson 过程,表示 $(0,t]$ 内保险公司收的保单数. $\{c_i, i \geqslant 1\}$ 与 $\{Y_k, k \geqslant 1\}$ 均为非负独立同分布随机变量序列. $\{M(t), t \geqslant 0\}$,$\{c_i, i \geqslant 1\}$ 与 $\{Y_k, k \geqslant 1\}$ 相互独立,$\{M^p(t), t \geqslant 0\}$ 是 $\{M(t), t \geqslant 0\}$ 的 p- 稀疏过程[9],即 $\{M^p(t), t \geqslant 0\}$ 是强度为 $p\lambda$ 的齐次 Poisson 过程,$M^p(t)$ 表示 $(0,t]$ 内发生索赔的次数 $(0 < p < 1)$.

模型(1)与模型(2)描述的都是单一险种风险过程,随着保险公司业务规模的不断扩大,经营单一险种对于保险公司来说是不符合实际的,讨论多险种风险模型更能与保险实际运作相结合. 根据上述情况,本文对模型(2)加以推广,并加入随机干扰项,并在此基础上加以研究.

收稿日期:2007-01-26
修回日期:2007-06-20
作者简介:方世祖(1964-),男,副教授,博士研究生,主要从事随机过程及其在风险理论中的应用研究.

1 带干扰的多险种风险模型

定义 1 设 $u \geqslant 0, d > 0$ 均为常数,$t \geqslant 0$,

$$R(t) = u + (\sum_{i=1}^{M_1(t)} c_i - \sum_{i=1}^{M_1^p(t)} X_i) + (\sum_{i=1}^{M_2(t)} z_i - \sum_{i=1}^{M_2^q(t)} Y_i) + dW(t) = u + S_1(t) + S_2(t) + dW(t) = u + S(t), \quad (3)$$

称 $\{R(t), t \geqslant 0\}$ 为盈余过程,$\{S(t), t \geqslant 0\}$ 为盈利过程.

模型(3)为本文建立的带干扰的多险种风险模型,其中 $\{M_1(t), t \geqslant 0\}$ 是一个强度为 λ_1 的齐次 Poisson 过程,表示 $(0,t]$ 内保险公司收的A险种保单数;c_i 是A险种第 i 次保单费,且 $\{c_i, i \geqslant 1\}$ 是非负独立同分布随机变量序列,假定其共同分布函数为 $G_1(x)$,$Ec_i = \mu_1$;$\{M_1^p(t), t \geqslant 0\}$ 是过程 $\{M_1(t), t \geqslant 0\}$ 的 p-稀疏过程,即 $\{M_1^p(t), t \geqslant 0\}$ 是强度为 $p\lambda_1$ 的齐次 Poisson 过程,$0 < p < 1$,$M_1^p(t)$ 表示 $(0,t]$ 内A险种发生索赔次数;X_i 表示A险种第 i 次赔付量,$\{X_i, i \geqslant 1\}$ 为非负独立同分布随机变量序列,假定其共同分布函数为 $F_1(x)$,$EX_i = \mu_3$. $\{M_2(t), t \geqslant 0\}$ 是一个强度为 λ_2 的齐次 Poisson 过程,表示 $(0,t]$ 内保险公司收的B险种保单数;z_i 是B险种第 i 次保单费,且 $\{z_i, i \geqslant 1\}$ 是非负独立同分布随机变量序列,假定其共同分布函数为 $G_2(x)$,$Ez_i = \mu_2$;$\{M_2^q(t), t \geqslant 0\}$ 是过程 $\{M_2(t), t \geqslant 0\}$ 的 q-稀疏过程,即 $M_2^q(t)$ 是强度为 $q\lambda_2$ 的齐次 Poisson 过程 $(0 < q < 1)$,$M_2^q(t)$ 表示 $(0,t]$ 内B险种发生索赔次数;Y_i 表示B险种第 i 次赔付量,$\{Y_i, i \geqslant 1\}$ 为非负独立同分布随机变量序列,假定其共同分布函数为 $F_2(x)$,$EY_i = \mu_4$. $W(t)$ 是一标准维纳过程. $\{M_1(t), t \geqslant 0\}$,$\{M_2(t), t \geqslant 0\}$,$\{z_i, i \geqslant 1\}$,$\{c_i, i \geqslant 1\}$,$\{X_i, i \geqslant 1\}$,$\{Y_i, i \geqslant 1\}$ 和 $W(t)$ 相互独立,$S_1(t), S_2(t)$ 与 $W(t)$ 相互独立.

2 相关引理和定义

引理 1[10] (Ⅰ)$S(0) = 0$;

(Ⅱ)$\{S(t), t \geqslant 0\}$ 具有平稳独立增量性.

保险公司为运作上的安全,要求 $E[S(t)] > 0$,即

$$E[M_1(t)]E[c_i] + E[M_2(t)]E[z_i] - E[M_1^p(t)]E[X_i] - E[M_2^q(t)]E[Y_i] = (\lambda_1\mu_1 + \lambda_2\mu_2 - p\lambda_1\mu_3 - q\lambda_2\mu_4)t > 0.$$

定义 2 相对安全负载 $\rho = \dfrac{\lambda_1\mu_1 + \lambda_2\mu_2}{p\lambda_1\mu_3 + q\lambda_2\mu_4} - 1 > 0$.

引理 2 $\lim\limits_{t\to\infty} R(t) = \infty$, a. s.

证明 显然 $t \to \infty$ 时,$M_1(t) \to \infty$,$M_2(t) \to \infty$,$M_1^p(t) \to \infty$,$M_2^q(t) \to \infty$,所以根据强大数定律[11]和文献[10]知

$$\lim_{t\to\infty} \frac{R(t)}{t} = \lim_{t\to\infty} \left(\frac{u}{t} + \frac{\sum_{i=1}^{M_1(t)} c_i}{t} - \frac{\sum_{i=1}^{M_1^p(t)} X_i}{t} + \frac{\sum_{i=1}^{M_2(t)} z_i}{t} - \frac{\sum_{i=1}^{M_2^q(t)} Y_i}{t} + \frac{dW(t)}{t}\right) = \lambda_1\mu_1 - \lambda_1 p\mu_3 + \lambda_2\mu_2 - q\lambda_2\mu_4 > 0, \text{a. s.}$$

故 $\lim\limits_{t\to\infty} R(t) = \infty$, a. s. 引理 2 证毕.

但是,这并不排除在某一瞬时,盈余过程有可能取负值,这时称保险公司"破产". 以下恒记 T_u 为保险公司首次破产的时刻,简称为破产时刻,即令 $T_u = \inf\{t; R(t) < 0\}$,$\inf\varnothing = \infty$. 我们研究的是保险公司的最终破产的概率 $\Psi(u) = P(T_u < \infty \mid R(0) = u)$,$\forall\, u \geqslant 0$.

定义 3 根据模型(3)的假定,定义 c_i 与 z_i 的 Laplace 变换 $\Phi_1(r) = E[e^{-rc_i}] = \int_0^\infty e^{-rx} dG_1(x)$,$r > 0$,$\Phi_2(r) = E[e^{-rz_i}] = \int_0^\infty e^{-rx} dG_2(x)$,$r > 0$;定义 X_i 与 Y_i 的矩母函数 $M_1(r) = \int_0^\infty e^{rx} dF_1(x)$,$M_2(r) = \int_0^\infty e^{rx} dF_2(x)$,并令 $h_1(r) = \int_0^\infty e^{rx} dF_1(x) - 1$,$h_2(r) = \int_0^\infty e^{rx} dF_2(x) - 1$.

假设 $\Phi_1(r) < \infty$,$\Phi_2(r) < \infty$,并存在 $r^* > 0$,使得 $r \to r^*$ 时,$h_1(r) \to \infty$,$h_2(r) \to \infty$,当然也允许 $r^* = \infty$[2].

设 $g(r) = -(\lambda_1 + \lambda_2) + \lambda_1\Phi_1(r)(ph_1(r) + 1) + \lambda_2\Phi_2(r)(qh_2(r) + 1) + \frac{1}{2}d^2r^2$.

引理 3 对于盈利过程 $\{S(t), t \geqslant 0\}$,有 $E[e^{-rS(t)}] = e^{tg(r)}$.

证明 由模型(3)的假设及全期望公式[11],得

$$E[e^{-rS(t)}] = E[e^{-r(S_1(t)+S_2(t)+dW(t))}] = E[e^{-rS_1(t)}] \cdot E[e^{-rS_2(t)}] \cdot E[e^{-rdW(t)}] = \exp\{\lambda_1[\Phi_1(r)(ph_1(r) + 1) - 1]t\} \cdot \exp\{\lambda_2[\Phi_2(r)(qh_2(r) + 1) - 1]t\} \cdot \exp\{\frac{1}{2}td^2r^2\} = e^{tg(r)}.$$

引理 3 证毕.

引理 4 方程 $g(r) = 0$ 存在唯一的正解 R,称之为调节系数.

证明 容易证明 $g(r)$ 在 $(0, r^*)$ 内是凸函数,

$g'(0) < 0$,又$r \to r^*$时,$g(r) \to \infty$,所以必存在唯一的正数r使得$g(r)=0$,此时称方程$g(r)=0$的唯一正解r为调节系数,记之为R,并称方程$g(r)=0$为调节方程.引理4证毕.

引理5 设$M_u(t)=\exp(-rR(t)-tg(r))$,那么$\{M_u(t),F_t,t\geqslant 0\}$是鞅,其中$F_t=\sigma\{S(v),v\leqslant t\}$.

证明 设$s\leqslant t$,则

$E[M_u(t)|F_s]=E[\exp(-rR(t)-tg(r))|F_s]=E[\exp(-rR(s)-sg(r)-r(R(t)-R(s))-(t-s)g(r))|F_s]=$

$M_u(s)E[\frac{e^{-r(R(t)-R(s))}}{e^{(t-s)g(r)}}|F_s]=M_u(s)$.

由$\{S(t),t\geqslant 0\}$具有平稳独立增量性及引理3可知最后一个等式成立.定理5证毕.

引理6 T_u关于F是停时.

3 主要结果

定理1 在模型(3)中,Lundberg不等式成立:$\Psi(u)\leqslant e^{-Ru}$,其中$R=\sup\limits_{r>0}\{r:g(r)\leqslant 0\}$.

证明 任意选定$t_0>0$,则$t_0\wedge T_u$为有界停时,由有界停时定理[2]及全期望公式[11],得

$$e^{-ru}=M_u(0)=E[M_u(t_0\wedge T_u)]=E[M_u(t_0\wedge T_u)|T_u\leqslant t_0]P(T_u\leqslant t_0)+E[M_u(t_0\wedge T_u)|T_u>t_0]P(T_u>t_0)\geqslant E[M_u(T_u)|T_u\leqslant t_0]P(T_u\leqslant t_0), \tag{4}$$

因为在$\{T_u<\infty\}$上$u+S(T_u)<0$,所以

$$P(T_u\leqslant t_0)\leqslant\frac{e^{-ru}}{E[M_u(T_u)|T_u\leqslant t_0]}\leqslant\frac{e^{-ru}}{E[e^{-T_ug(r)}|T_u\leqslant t_0]}\leqslant e^{-ru}\sup_{t\geqslant 0}e^{tg(r)}, \tag{5}$$

在(5)式中令$t_0\to\infty$,得$\Psi(u)\leqslant e^{-ru}\sup\limits_{0\leqslant t\leqslant t_0}e^{tg(r)}$.为了获得尽可能满意的不等式,在限制条件$\sup\limits_{t\geqslant 0}e^{tg(r)}<\infty$下,选择尽可能大$r$的,并记之为$R$.此时很明显$R=\sup\limits_{r>0}\{r:g(r)\leqslant 0\}$.此时称$R$为Lundberg指数.根据前面调节系数定义,此处的R也就是调节系数.此$\Psi(u)\leqslant e^{-Ru}$.定理1证毕.

定理2 在模型(3)下,设R为调节系数,则最终破产概率为

$$\Psi(u)=\frac{e^{-Ru}}{E[\exp(-RR(T_u))|T_u<\infty]}.$$

证明 在(4)式中取$r=R$得

$$e^{-Ru}=E[e^{-RR(T_u)}|T_u\leqslant t_0]P(T_u\leqslant t_0)+E[e^{-RR(t_0)}|T_u>t_0]P(T_u>t_0), \tag{6}$$

以I_A表示集合A的示性函数,有

$$0\leqslant E[e^{-RR(t_0)}|T_u>t_0]P(T_u>t_0)=E[e^{-RR(t_0)}I_{\{T_u>t_0\}}]\leqslant E[e^{-RR(t_0)}I_{\{R(t_0)\geqslant 0\}}],$$

由于$0\leqslant e^{-RR(t_0)}I_{\{R(t_0)\geqslant 0\}}\leqslant 1$,根据引理2及控制收敛定理[11]有

$$\lim_{t_0\to\infty}E[e^{-RR(t_0)}|T_u>t_0]P(T_u>t_0)=0, \text{a.s.}$$

于是在(6)式两端令$t_0\to\infty$,对(6)式中第一项用单调收敛定理便得

$$\Psi(u)=P(T_u<\infty)=\frac{e^{-Ru}}{E[\exp(-RR(T_u))|T_u<\infty]}.$$

定理2证毕.

参考文献:

[1] GERBER H U. 数学风险导引[M]. 成世学,严颖,译. 北京:世界图书出版社,1997.

[2] GRANDEL J. Aspect of risk theory[M]. NewYork: Spring-Verlag,1999.

[3] ASMUSSEN S. Ruin probabilities[M]. Singapore: World Scientific,2000.

[4] 罗建华,方世祖. 索赔为稀疏过程的风险模型[J]. 广西科学,2004,11(4):306-308.

[5] 罗华,邹捷中. 稀疏过程在双险种破产问题中的应用[J]. 株洲工学院学报,2006,20(4):12-14.

[6] 陈珊萍,王过京,王振羽. 稀疏过程在保险公司破产问题中的应用[J]. 数理统计与管理,2001,20(5):26-30.

[7] WU X,YUEN K C. A discrete-time risk model with interaction between classes of business[J]. Insurance: Mathematics and Economics,2003,33:117-133.

[8] WANG G J,YUAN K C. On a correlated aggregate claims model with thinning-dependent structure[J]. Insurance:Mathematics and Economics,2005,36:456-468.

[9] 邓永录,梁之舜. 随机点过程及其应用[M]. 北京:科学出版社,1998.

[10] 何声武. 随机过程引论[M]. 北京:高等教育出版社,1996.

[11] KALLENBERG O. Foundations of modern probability[M]. Berlin:Springer-Verlag,2002.

(责任编辑:韦廷宗)