

# 一类被开发的食饵-捕食者两种群模型的定性分析 Qualitative Analysis of a Class of Developed Two-specie Predator-prey Models

黄军华<sup>1</sup>, 郑镇汉<sup>2</sup>

HUANG Jun-hua<sup>1</sup>, ZHENG Zhen-han<sup>2</sup>

(1. 玉林师范学院数学与计算机科学系, 广西玉林 537000; 2. 广州航海高等专科学校基础部, 广东广州 510725)

(1. Department of Mathematics and Computer Science, Yulin Teachers College, Yulin, Guangxi, 537000, China; 2. Department of Basic Courses, Guangzhou Maritime College, Guangzhou Guangdong, 510725, China)

摘要: 讨论被开发的食饵-捕食者两种群系统模型,  $dx/dt = x(r_1 - ax - by/(1 + \omega x)) + G$ ,  $dy/dt = y(-r_2 + kbx/(1 + \omega x))$  的平衡点性态和全局稳定性, 用 Bendixson 环域定理证明极限环的存在性, 用张芷芬唯一性定理证明极限环的唯一性.

关键词: 平衡点 全局稳定性 极限环

中图分类号: O175 文献标识码: A 文章编号: 1002-7378(2007)03-0135-03

Abstract: In this article, a discussion is taken up on quality of the equilibrium and the global stability of the developed two-specie predator-prey system;  $dx/dt = x(r_1 - ax - by/(1 + \omega x)) + G$ ,  $dy/dt = y(-r_2 + kbx/(1 + \omega x))$ . Further more, the existence and the uniqueness of the limit cycle in this system are proved respectively by applying Bendixson Theoroem and Zheng Zifen's Uniqueness Theoroem.

Key words: equilibrium, global stability, limit cycle

被开发的食饵-捕食者两种群模型最一般的形式是

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = xf(x, y) - h_1, \\ \frac{dy}{dt} = yg(x, y) - h_2, \end{cases} \quad (1)$$

其中  $h_1$  与  $h_2$  可以是常数, 也可以是关于  $x, y$  或  $t$  的函数, 当  $h_1$  与  $h_2$  均为正数时, 表示对两种群的收获(或捕捞); 当  $h_1$  与  $h_2$  均为负数时, 表示对两种群的投放, 当然, 也可以是  $h_1, h_2 < 0$ . 对系统(1)进行一般的讨论是比较繁杂而困难的问题<sup>[1-3]</sup>. 文献[4]研究了模型  $dx/dt = x(a_0 + a_1x - a_2x^2 - a_3x^3) + s$ ,  $dy/dt = y(x - 1)$ ; 文献[5]研究了模型  $dx/dt = x(a - cx - bx^2 - h(x)) - axy/(1 + \beta x)$ ,  $dy/dt = -cy + k \cdot ax/(1 + \beta x)$ , 均得到系统极限环的存在及唯

一性的条件.

我们对系统(1), 取  $f(x, y) = r_1 - ax - \frac{by}{1 + \omega x}$ ,  $g(x, y) = -r_2 + k \frac{bx}{1 + \omega x}$ ,  $h_1 = 0$  得到的模型

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(r_1 - ax - \frac{by}{1 + \omega x}) + G, \\ \frac{dy}{dt} = y(-r_2 + k \frac{bx}{1 + \omega x}), \end{cases} \quad (2)$$

其中  $r_1, r_2, a, b, k, G$  均为正常数,  $G$  为投放率,  $\frac{bx}{1 + \omega x}$  为功能性反应函数.

由生态学的实际意义<sup>[2]</sup>, 我们在  $D = \{(x, y) | x \geq 0, y \geq 0\}$  下, 记  $\bar{D} = \{(x, y) | x > 0, y > 0\}$ .

作时间变换  $dt = (1 + \omega x)dr$ , 这里  $1 + \omega x > 0$ , 则系统(2)化成

$$\begin{cases} \frac{dx}{dr} = x(a_1 + a_2x + a_3x^2 - by) + G, \\ \frac{dy}{dr} = y(-r_2 + \beta x), \end{cases} \quad (3)$$

其中,  $a_1 = r_1 + G\omega > 0$ ,  $a_2 = r_1\omega - a$  不定号,  $a_3 = -$

收稿日期: 2007-04-13

修回日期: 2007-06-08

作者简介: 黄军华(1964-), 男, 讲师, 主要从事数学教学与微分方程研究工作.

$aw < 0, \beta = kb - r_2\omega$ 不定号. 再作变换  $x = \frac{r_2}{\beta}\bar{x}, y =$

$\frac{r_2}{b}\bar{y}, dt = \frac{1}{r_2}d\bar{t}$ , 仍记  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t})$  为  $(x, y, t)$ , 则系统(3)

化成

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(b_1 + b_2x + b_3x^2 - y) + h = P(x, y), \\ \frac{dy}{dt} = y(x - 1) = Q(x, y), \end{cases} \quad (4)$$

其中  $b_1 = \frac{a_1}{r_2} > 0, b_2 = \frac{a_2}{\beta}$  不定号,  $b_3 = \frac{r_2a_3}{\beta^2} < 0, h = \frac{G\beta}{r_2}$  不定号. 本文仅对  $\beta = kb - r_2\omega > 0$  进行系统的平衡点的性态和全局稳定性分析, 此时  $h > 0$ .

### 1 系统的平衡点及其分析

设  $H(x) = b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + h = 0$ , 由根与系数的关系知  $H(x)$  有唯一的正根  $x_1$ . 令

$$\begin{cases} P(x, y) = x(b_1 + b_2x + b_3x^2 - y) + h = 0, \\ Q(x, y) = y(x - 1) = 0, \end{cases}$$

则系统(4)有平衡点  $(x_1, 0), (1, y_0)$ , 其中  $y_0 = b_1 + b_2 + b_3 + h$  且满足条件  $H(x_1) = b_1x_1 + b_2x_1^2 + b_3x_1^3 + h = 0$ , 若  $b_1 + b_2 + b_3 + h > 0$ , 则系统(3)在  $D$  内有正平衡点, 否则没有正平衡点, 从而系统无环.

**引理 1** 当  $b_1 + b_2 + b_3 + h > 0$  时, 系统(4)有两个平衡点  $A(x_1, 0), B(1, y_0)$  且  $x_1 > 1$ .

**证明** 平衡点由以上分析知, 又  $H(x) = b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + h = 0$  有唯一的正根  $x_1$ ,

$$H(1) = b_1 + b_2 + b_3 + h > 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} H(x) = -\infty, \text{从而 } x_1 > 1.$$

**引理 2** (I) 当  $b_1 + b_2 + b_3 + h > 0$  时,  $A(x_1, 0)$  为鞍点;

(II) 当  $b_1 + b_2 + b_3 + h > 0$  时, 且  $h - b_2 - 2b_3 > 0$  时,  $B(1, y_0)$  为稳定的焦(结)点;

(III) 当  $b_1 + b_2 + b_3 + h > 0$  时, 且  $h - b_2 - 2b_3 < 0$  时,  $B(1, y_0)$  为不稳定的焦(结)点;

**证明** 由系统(4)有

$$P_x = b_1 + 2b_2x + 3b_3x^2 - y, P_y = -x, Q_x = y, Q_y = x - 1.$$

令  $f(x, y) = -[(b_1 + 2b_2x + 3b_3x^2 - y) + (x - 1)]$ ,  $g(x, y) = (b_1 + 2b_2x + 3b_3x^2 - y)(x - 1) + xy$ .

$$(I) g(x_1, 0) = (b_1 + 2b_2x_1 + 3b_3x_1^2)(x_1 - 1) = x_1^{-1}(2b_2x_1 + 2b_2x_1^2 + 2b_3x_1^3 - b_1x_1 + b_3x_1^3)(x_1 -$$

$1) = x_1^{-1}(-2h - b_1x_1 + b_3x_1^3)(x_1 - 1) < 0$ , 即  $A(x_1, 0)$  为鞍点.

$$g(1, y_0) = y_0 > 0, f(1, y_0) = y_0 - b_1 - 2b_2 - 3b_3 = h - b_2 - 3b_3.$$

(I) 由条件得  $f(1, y_0) > 0, g(1, y_0) > 0$ , 即  $B(1, y_0)$  为稳定的焦(结)点.

(III) 由条件得  $f(1, y_0) < 0, g(1, y_0) > 0$ , 即  $B(1, y_0)$  为不稳定的焦(结)点.

### 2 主要结果及证明

**定理 1** 当  $h > \frac{b_2^3}{27b_3^2}, b_1 + b_2 + b_3 + h > 0$  且  $h - b_2 - 2b_3 > 0$  时, 系统(4)在  $\bar{D}$  内无闭轨, 此时  $B(1, y_0)$  是全局稳定的.

**证明** 由引理 2 知  $B(1, y_0)$  是稳定的焦(结)点. 取函数  $B(x, y) = x^{-1}y^{-1}$ , 则  $BP = y^{-1}(b_1 + b_2x + b_3x^2 - y + hx^{-1}), BQ = x^{-1}(x - 1), \frac{\partial(BP)}{\partial x} + \frac{\partial(BQ)}{\partial y} = y^{-1}(b_2 + 2b_3x - hx^{-2})$ , 显然, 若  $b_2 \leq 0$  则在  $\bar{D}$  内有  $\frac{\partial(BP)}{\partial x} + \frac{\partial(BQ)}{\partial y} < 0$ , 若  $b_2 > 0$  令  $\Phi(x) =$

$b_2x^2 + 2b_3x^3 - h$ , 易知  $\Phi(x)$  在  $x = \frac{-b_2}{3b_3}$  取最大值,

从而当  $\Phi(\frac{-b_2}{3b_3}) = b_2(\frac{-b_2}{3b_3})^2 + 2b_3(\frac{-b_2}{3b_3})^3 - h =$

$$\frac{b_2^3}{27b_3^2} - h < 0, \text{即 } h > \frac{b_2^3}{27b_3^2} \text{ 时, 有 } \Phi(x) < 0, \text{从而有}$$

$$\frac{\Phi(x)}{x^2} = b_2 + 2b_3x - hx^{-2} < 0, \text{于是当 } h > \frac{b_2^3}{27b_3^2} \text{ 时,}$$

在  $\bar{D}$  内有  $\frac{\partial(BP)}{\partial x} + \frac{\partial(BQ)}{\partial y} < 0$ , 又当  $b_2 \leq 0$  时, 一定

有  $h > \frac{b_2^3}{27b_3^2}$ , 由 Dulac 定理知, 系统(4)在  $\bar{D}$  内无闭轨且  $B(1, y_0)$  为全局稳定的.

**定理 2** 当  $b_1 + b_2 + b_3 + h > 0$ , 且  $h - b_2 - 2b_3 < 0$  时, 系统(4)在  $D$  内的正平衡点  $B(1, y_0)$  不稳定, 并且在该点外围至少存在一个稳定的极限环.

**证明** 由引理 2 知定理 2 的前部分结论成立. 下面证明后部分结论. 过点  $A(x_1, 0)$  作直线段  $L_1 =$

$x - x_1 = 0$ , 则  $\frac{dL_1}{dt}|_{(x_1)} = \frac{dx}{dt}|_{x=x_1} = -x_1y < 0, (y > 0)$ , 故  $L_1$  为无切直线,  $D$  内过  $L_1$  的轨线从左往右穿

过  $L_1$ ; 作直线段  $L_2 = x + y - k = 0$ , 则  $\frac{dL_2}{dt}|_{(x_1)} =$

$$(\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt})|_{y=k-x} = x(b_1 + b_2x + b_3x^2 - y) + h +$$

$$y(x - 1) = x(1 + b_1 + b_2x + b_3x^2) + h - k,$$

于是当  $0 < x \leq x_1, k \geq 1$  时,  $\frac{dL_2}{dt}|_{(x_1)} < 0, L_2$  为无切

直线,  $D$  内的轨线从右上往左下穿过  $L_2, L_3 = y = 0$  为轨线;  $L_4 = x = 0$  为无切直线, 于是由  $L_1, L_2, L_3, L_4$  围成的闭域的内部包含了  $D$  中的一个不稳定点, 而且系统(4)为解析系统, 由 Bendison 环域定理知在  $D$  内至少存在一个包含  $B$  点的稳定的极限环. 其向量场图如图 1 所示.

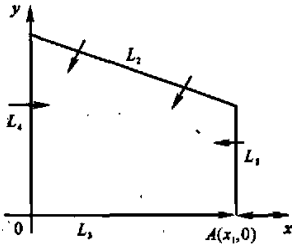


图 1 系统(4)的向量场

**定理 3** 当  $b_1 + b_2 + b_3 + h > 0$ , 且  $h - b_2 - 2b_3 < 0$  时, 系统(4)在  $D$  内的正平衡点  $B(1, y_0)$  的外围存在惟一稳定的极限环.

**证明** 极限环的存在与稳定性由定理 2 可以证明得到. 为了证明其惟一性, 对系统(4)作变换  $x = 1 + u, y = y_0 e^v, dr = (1 + u)dt$  则可化成如下等价系统:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\varphi(v) - F(u), \\ \frac{dv}{dt} = g(u), \end{cases} \quad (5)$$

其中  $\varphi(v) = y_0(e^v - 1), F(u) = -b_3 u^2 - (b_2 + 2b_3)u + \frac{hu}{1+u}, g(u) = \frac{u}{1+u}, f(u) = F'(u) = -2b_3 u - (b_2 + 2b_3) + h(1+u)^{-2}, G(u) = \int_0^u \frac{u}{1+u} du = u - \ln(1+u).$

$g(u)$  在  $(-1, +\infty)$  满足 Lipschitz 条件, 当  $u > -1$  且  $u \neq 0$  时,  $ug(u) = \frac{u^2}{1+u} > 0, G(+\infty)$

$= +\infty, G(-1+0) = +\infty, \varphi(+\infty) = +\infty, \varphi(-\infty) = -y_0, \varphi'(v) = y_0 e^v > 0, \varphi(v)$  在  $(-\infty, +\infty)$  单调增加, 而  $F(0) = 0, f(0) = h - (b_2 + 2b_3) < 0,$   
 $\left(\frac{f(u)}{g(u)}\right)' = \left(\frac{-2b_3 u - (b_2 + 2b_3) + h(1+u)^{-2}}{u(1+u)^{-1}}\right)'$   
 $= u^{-2}(1+u)^{-2}[-2b_3 u^2(1+u)^2 + (b_2 + 2b_3)u^2 + 2(b_2 + 2b_3 - h)u + (b_2 + 2b_3 - h)],$  令  $R(u) = (b_2 + 2b_3)u^2 + 2(b_2 + 2b_3 - h)u + (b_2 + 2b_3 - h),$   
 $\Delta = 4(b_2 + 2b_3 - h)^2 - 4(b_2 + 2b_3)(b_2 + 2b_3 - h) = -4(b_2 + 2b_3 - h)h < 0,$  从而  $\forall u > -1, R(u) > 0,$  即  $\left(\frac{f(u)}{g(u)}\right)' > 0.$  由张芷芬定理知系统(5)存在惟一的极限环.

### 3 结论

在定理 3 的条件下, 系统(4)存在惟一稳定的极限环, 该极限环对应的运动是一周期振荡, 这表明食饵种群与捕食种群最终处于稳定的振荡状态.

#### 参考文献:

[1] 马知恩. 种群生态学的数学建模与研究[M]. 合肥: 安徽教育出版社, 1996: 337-338.  
 [2] 陈兰荪. 数学生态学模型和研究方法[M]. 北京: 科学出版社, 1988: 4-7.  
 [3] 马知恩, 周义仓. 常微分方程定性理论与稳定性方法[M]. 北京: 科学出版社, 2001: 155-176.  
 [4] 韦煜明. 一类食饵种群具有投放率的捕食系统的定性分析[J]. 广西科学, 2003, 10(1): 11-14.  
 [5] 陈柳娟, 孙建华. 具 Holling 第 I 类功能性反应的捕食者-食饵系统的定性分析[J]. 生物数学学报, 2003, 18(1): 33-36.

(责任编辑: 尹 闯 邓大玉)

(上接第 134 页)

还得到了塔图  $T_n$  的另一种标号  $g$ , 且满足:  $g(v_0) = 0, g(v_{n-1}) = i(n-3) (i = 2, 3), g(v_{n-1}) = 4(n-3), g(v_i) = i (i = 1, 2, \dots, n-4).$  容易验证  $g$  也是  $T_n$  的一种优美标号方法.

#### 参考文献:

[1] 刘春峰, 王秀英. 图  $S_n + S_n$  和  $S_n + K_n$  的优美性和强协调性[J]. 辽宁工学院学报, 2000(10): 69-70.  
 [2] 年煜, 孙荣国. 轮图  $W_n$  和扇图  $F_n$  的强协调性[J]. 青海师范大学学报: 自然科学版, 1991(1): 30-34.  
 [3] 徐士达.  $S_n + K_1$  及其相关图的协调性[J]. 上饶师专学报, 1993(5): 1-3.

[4] JOSEPH A, GALLIAN. A dynamic survey of graph labeling[J]. The Electronic Journal of Combinatorics, 2005, #DS6(5): 1-148.  
 [5] 哈拉里 F. 图论[M]. 李慰董, 译. 上海: 上海科学技术出版社, 1980.  
 [6] 邦迪 J A, 默蒂 U S R. 图论及其应用[M]. 吴望名, 李念祖, 吴兰芳, 等译. 北京: 科学出版社, 1984.  
 [7] 孙宗剑, 罗海鹏. 塔图  $T_n$  的强协调性[J]. 桂林工学院学报, 2006(4): 589-590.  
 [8] 朱洪, 陈增武, 段振华, 等. 算法设计和分析[M]. 上海: 上海科学技术文献出版社, 1989.

(责任编辑: 尹 闯 邓大玉)