

塔图 T_n 的优美性*

The Gracefulness of Tower Graphs

徐云¹, 苏文龙², 罗海鹏³, 孙宗剑¹
XU Yun¹, SU Wen-long², LUO Hai-peng³, SUN Zong-jian¹

(1. 广西师范学院数学与计算机科学系, 广西南宁 530001; 2. 广西大学梧州分校, 广西梧州 543002; 3. 广西科学院, 广西南宁 530007)

(1. Department of Mathematics and Computer Science, Guangxi Teachers University, Nanning, Guangxi, 530001, China; 2. Guangxi University Wuzhou Branch, Wuzhou, Guangxi, 543002, China; 3. Guangxi Academy of Sciences, Nanning Guangxi, 530007, China)

摘要:设计一种寻找塔图 T_n 优美标号的算法, 通过计算机的计算给出这类图的优美标号, 并证明塔图 T_n 是优美的。

关键词:塔图 标号 优美性

中图分类号: O157.5; TP312 **文献标识码:** A **文章编号:** 1002-7378(2007)03-0133-02

Abstract: In this article, an algorithm is designed to search for Tower graphs T_n 's graceful labeling, which is developed by using a computer. Therefore, the T_n is proved graceful.

Key words: Tower graphs, labeling, gracefulness

Rosa 在 1967 年引入了 β -值作为研究完全图分解为同构子图的工具, 这就是现在称之为优美标号^[1]的雏形. 图的优美标号问题已经发展成为组合数学中的一个热门课题, 到目前为止, 已经定义了几十种优美图^[2], 如毛毛虫、橄榄树、舵轮图、某些连通图^[3]等, 这些标号图作为数学模型在实际生活中被广泛应用. 本文设计一个算法, 借助这个算法找到了塔图的优美标号, 并给出其优美性的证明.

1 定义

定义 1^[4] 对于图 $G(V, E)$ 来说, 若存在单射 $f: V(G) \rightarrow \{0, 1, 2, \dots, |E(G)|\}$ 使得映射 $f^*(xy) = |f(x) - f(y)|$ 是从 $E(G)$ 到 $\{1, 2, \dots, |E(G)|\}$ 的双射, 则称 f 为 G 的顶点的优美标号, 这时称 G 为优美的.

定义 2^[5] 星形图 S_n 是有 n 个顶点且其中一个顶点与其余 $n-1$ 个顶点都邻接, 但这 $n-1$ 个顶点互不邻接的图.

定义 3^[5] 完全图 K_n 是有 n 个顶点且每一对顶点都邻接的图.

定义 4^[6] 若图 G_1 和 G_2 分别有不相交的点集 V_1, V_2 和边集 E_1, E_2 , 则它们的并 $G = G_1 \cup G_2$ 定义为 $V = V_1 + V_2, E = E_1 + E_2$.

定义 5^[6] 若图 G_1 和 G_2 分别有不相交的点集 V_1, V_2 和边集 E_1, E_2 , 则它们的联是由 $G_1 \cup G_2$ 和所有的连接 V_1 和 V_2 的线所组成的图, 记为 $G_1 + G_2$.

定义 6^[7] T_n 被称为塔图, 若 $T_n = S_{n-2} + (K_1 \cup K_2)$.

由上述定义可知塔图 T_n 的顶点数至少为 5. T_5 如图 1 所示, T_6 如图 2 所示.

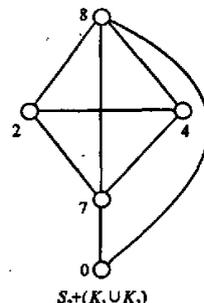


图 1 塔图 T_5

收稿日期: 2006-10-13

作者简介: 徐云(1974-), 女, 硕士研究生, 主要从事组合数学研究.

* 国家自然科学基金项目(60563008)和广西自然科学基金项目(桂科自 0728051)资助.

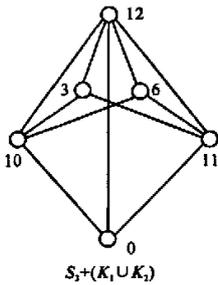


图2 塔图 T_5

2 优美标号的算法

对于塔图 T_n , 易知 $|V(T_n)| = n, |E(T_n)| = 4n - 12$. 我们设计一个算法, 对较小的 n 用遍历算法^[6] 探索一些特殊的塔图的优美标号方法并寻找标号规律. 算法步骤如下:

步骤1 输入 n ;

步骤2 在 $0, 1, \dots, 4n - 12$ 中选 n 个数 a_1, a_2, \dots, a_n ;

步骤3 给出顶点 v_i 到 $a_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 的一个对应;

步骤4 计算图中所有边的值,

如果某一条边的值和前面计算的边的值重复,

如果 v_i 到 a_i 还有其他对应, 转步骤3,

否则, 如果 $4n - 11$ 个数中选 n 个数还有其他方案, 转步骤2,

否则, 结束;

步骤5 找到了一种优美标号方法, 输出所有顶点的标号值, 转步骤3到 v_i 到 a_i 的下一个对应, 寻找下一种优美标号方法.

根据这个算法, 通过计算机计算, 获得一些特殊图的优美标号方法, 对这些标号方法进行认真分析, 从而获得塔图 T_n 的优美标号方法.

3 定理及其证明

定理1 塔图 T_n 都是优美的.

证明 只需给出塔图 T_n 的优美标号即可. 我们知道 $|E(T_n)| = 4n - 12, |V(T_n)| = n$. 不妨设 $V(T_n) = \{v_0, v_1, \dots, v_{n-1}\}$, 其中 $v_0 v_i \in E(T_n) (i = 1, 2, \dots, n - 1), v_{n-3} v_i \in E(T_n) (i = 1, 2, \dots, n - 4), v_{n-2} v_i \in E(T_n) (i = 1, 2, \dots, n - 4), v_{n-1} v_i \in E(T_n) (i = 1, 2, \dots, n - 4), v_{n-3} v_{n-1} \in E(T_n)$. 塔图中的顶点位置如图3所示. 下面给出图3中各个顶点的标号 f 如下: $f(v_0) = 4n - 12; f(v_i) = 3n + i - 9 (i = 1, 2, \dots, n - 4); f(v_{n-3}) = n - 3; f(v_{n-2}) = 0;$

$f(v_{n-1}) = 2(n - 3)$. 边的标号 f^* 定义为 $f^*(xy) = |f(x) - f(y)|$.

例如 $n = 5$ 时, T_5 的标号 $f(v_i)$ (其中 $i = 0, 1, 2, 3, 4$) 是 $8, 7, 2, 0, 4$ (如图1所示), $n = 6$ 时, $f(v_i)$ (其中 $i = 0, 1, 2, 3, 4, 5$) 是 $12, 10, 11, 3, 0, 6$ (如图2所示).

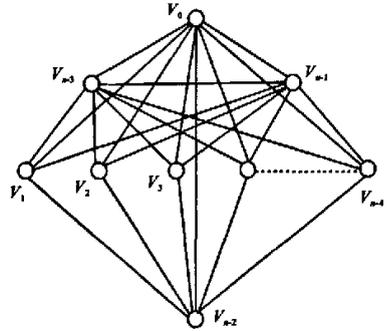


图3 塔图 T_n

下面证明 f 是 G 的优美标号, 易知 f 是从 $V(G)$ 到 $\{0, 1, 2, \dots, 4n - 12\}$ 的单射并且

$$f^*(v_0 v_i) = i, \text{ 其中 } i = 1, 2, \dots, n - 4; \quad (1)$$

$$f^*(v_{n-1} v_{n-2}) = n - 3; \quad (2)$$

$$f^*(v_{n-1} v_i) = n + i - 3, \text{ 其中 } i = 1, 2, \dots, n - 4; \quad (3)$$

$$f^*(v_{n-1} v_0) = 2(n - 3); \quad (4)$$

$$f^*(v_{n-3} v_i) = 2n + i - 6, \text{ 其中 } i = 1, 2, \dots, n - 4; \quad (5)$$

$$f^*(v_0 v_{n-4+i}) = (i + 2)(n - 3), \text{ 其中 } i = 1, 2; \quad (6)$$

$$f^*(v_{n-2} v_i) = 3n + i - 9, \text{ 其中 } i = 1, 2, \dots, n - 4. \quad (7)$$

由(1)式可知相应边的标号取遍 $\{1, 2, \dots, n - 4\}$ 中的数, 由(2)式可知相应边的标号取值为 $n - 3$, 由(3)式可知相应边的标号取遍 $\{n - 2, n - 1, \dots, 2n - 7\}$ 中的数, 由(4)式可知相应边的标号取 $2n - 6$, 由(5)式可知相应边的标号取遍 $\{2n - 5, 2n - 4, \dots, 3n - 10\}$ 中的数, 由(6)式可知相应边的标号取 $\{3n - 9, 4n - 12\}$ 中的数, 由(7)式可知相应边的标号取遍 $\{3n - 8, 3n - 7, \dots, 4n - 13\}$ 中的数, 于是边标号 f^* 是从 $E(T_n)$ 到集合 $\{1, 2, \dots, 4n - 12\}$ 的双射, 从而 f 是 T_n 的顶点的一个优美标号. 这样便证明了塔图 T_n 是优美的.

在用上述算法进行计算机探索的过程中, 我们

直线, D 内的轨线从右上往左下穿过 $L_2, L_3 = y = 0$ 为轨线; $L_4 = x = 0$ 为无切直线, 于是由 L_1, L_2, L_3, L_4 围成的闭域的内部包含了 D 中的一个不稳定点, 而且系统(4)为解析系统, 由 Bendison 区域定理知在 D 内至少存在一个包含 B 点的稳定的极限环. 其向量场图如图 1 所示.

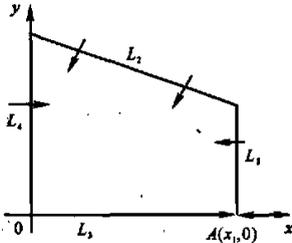


图 1 系统(4)的向量场

定理 3 当 $b_1 + b_2 + b_3 + h > 0$, 且 $h - b_2 - 2b_3 < 0$ 时, 系统(4)在 D 内的正平衡点 $B(1, y_0)$ 的外围存在唯一稳定的极限环.

证明 极限环的存在与稳定性由定理 2 可以证明得到. 为了证明其惟一性, 对系统(4)作变换 $x = 1 + u, y = y_0 e^v, dx = (1 + u)dt$ 则可化成如下等价系统:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\varphi(v) - F(u), \\ \frac{dv}{dt} = g(u), \end{cases} \quad (5)$$

其中 $\varphi(v) = y_0(e^v - 1), F(u) = -b_3 u^2 - (b_2 + 2b_3)u + \frac{hu}{1+u}, g(u) = \frac{u}{1+u}, f(u) = F'(u) = -2b_3 u - (b_2 + 2b_3) + h(1+u)^{-2}, G(u) = \int_0^u \frac{u}{1+u} du = u - \ln(1+u).$

$g(u)$ 在 $(-1, +\infty)$ 满足 Lipschitz 条件, 当 $u > -1$ 且 $u \neq 0$ 时, $ug(u) = \frac{u^2}{1+u} > 0, G(+\infty)$

$= +\infty, G(-1+0) = +\infty, \varphi(+\infty) = +\infty, \varphi(-\infty) = -y_0, \varphi'(v) = y_0 e^v > 0, \varphi(v)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 单调增加, 而 $F(0) = 0, f(0) = h - (b_2 + 2b_3) < 0,$
 $\left(\frac{f(u)}{g(u)}\right)' = \left(\frac{-2b_3 u - (b_2 + 2b_3) + h(1+u)^{-2}}{u(1+u)^{-1}}\right)'$
 $= u^{-2}(1+u)^{-2}[-2b_3 u^2(1+u)^2 + (b_2 + 2b_3)u^2 + 2(b_2 + 2b_3 - h)u + (b_2 + 2b_3 - h)],$ 令 $R(u) = (b_2 + 2b_3)u^2 + 2(b_2 + 2b_3 - h)u + (b_2 + 2b_3 - h),$
 $\Delta = 4(b_2 + 2b_3 - h)^2 - 4(b_2 + 2b_3)(b_2 + 2b_3 - h) = -4(b_2 + 2b_3 - h)h < 0,$ 从而 $\forall u > -1, R(u) > 0,$ 即 $\left(\frac{f(u)}{g(u)}\right)' > 0.$ 由张芷芬定理知系统(5)存在唯一的极限环.

3 结论

在定理 3 的条件下, 系统(4)存在唯一稳定的极限环, 该极限环对应的运动是一周期振荡, 这表明食饵种群与捕食种群最终处于稳定的振荡状态.

参考文献:

[1] 马知恩. 种群生态学的数学建模与研究[M]. 合肥: 安徽教育出版社, 1996: 337-338.
 [2] 陈兰荪. 数学生态学模型和研究方法[M]. 北京: 科学出版社, 1988: 4-7.
 [3] 马知恩, 周义仓. 常微分方程定性理论与稳定性方法[M]. 北京: 科学出版社, 2001: 155-176.
 [4] 韦煜明. 一类食饵种群具有投放率的捕食系统的定性分析[J]. 广西科学, 2003, 10(1): 11-14.
 [5] 陈柳娟, 孙建华. 具 Holling 第 I 类功能性反应的捕食者-食饵系统的定性分析[J]. 生物数学学报, 2003, 18(1): 33-36.

(责任编辑: 尹 闯 邓大玉)

(上接第 134 页)

还得到了塔图 T_n 的另一种标号 g , 且满足: $g(v_0) = 0, g(v_{n-1}) = i(n-3) (i = 2, 3), g(v_{n-1}) = 4(n-3), g(v_i) = i (i = 1, 2, \dots, n-4).$ 容易验证 g 也是 T_n 的一种优美标号方法.

参考文献:

[1] 刘春峰, 王秀英. 图 $S_n + S_n$ 和 $S_n + K_n$ 的优美性和强协调性[J]. 辽宁工学院学报, 2000(10): 69-70.
 [2] 年焜, 孙荣国. 轮图 W_n 和扇图 F_n 的强协调性[J]. 青海师范大学学报: 自然科学版, 1991(1): 30-34.
 [3] 徐士达. $S_n + K_1$ 及其相关图的协调性[J]. 上饶师专学报, 1993(5): 1-3.

[4] JOSEPH A, GALLIAN. A dynamic survey of graph labeling[J]. The Electronic Journal of Combinatorics, 2005, #DS6(5): 1-148.
 [5] 哈拉里 F. 图论[M]. 李慰董, 译. 上海: 上海科学技术出版社, 1980.
 [6] 邦迪 J A, 默蒂 U S R. 图论及其应用[M]. 吴望名, 李念祖, 吴兰芳, 等译. 北京: 科学出版社, 1984.
 [7] 孙宗剑, 罗海鹏. 塔图 T_n 的强协调性[J]. 桂林工学院学报, 2006(4): 589-590.
 [8] 朱洪, 陈增武, 段振华, 等. 算法设计和分析[M]. 上海: 上海科学技术文献出版社, 1989.

(责任编辑: 尹 闯 邓大玉)