广西科学院学报 2007,23(1):26~29,32
Journal of Guangxi Academy of Sciences Vol. 23,No. 1 February 2007

可转换期权及其定价分析*

The Convertible Option and Its Pricing Analysis

黄敢基[1,2]**,区诗德**[1]**,杨善朝**[1]

HUANG Gan-ji[1,2],OU Shi-de[1],YANG Shan-chao[1]

(1. 广西师范大学数学系,广西桂林 541004;2. 广西大学数学与信息科学学院,广西南宁 530004)

(1. Department of Mathematics,Guangxi Normal University,Guilin,Guangxi,541004,China;2. College of Mathematics and Information Science, Guangxi University, Nanning, Guangxi, 530004,China)

摘要:给出一种新型期权——可转换期权的定义及其模型的基本假设,采用停时理论和期权定价的鞅方法得到可转换期权的定价公式,并将可转换期权的价格与标准欧式期权的价格进行对比分析. 分析结果表明,当现实市场中由各种不确定因素引起的股票价格、无风险利率、波动率等因素发生较大变化时,可转换期权相比标准欧式期权具有风险小、潜在获利机会大等优点.

关键词:期权 关卡 鞅 风险管理

中图法分类号:O29 **文献标识码**:A **文章编号**:1002-7378(2007)01-0026-04

Abstract:We give the definition of a new kind of exotic option-convertible option and the basic assumptions of the model. The pricing formula of the new option is obtained with the help of the Martingale method and the theory of the stopping, and the price of the new option is analyzed by comparing it to the standard European options. Analysis result shows this new option shares the advantages of less risk and more potential profit opportunity, when factors in the practical markets such as stock prices,non-risk rates and volatility change to a fairly great extent out of a variety of uncertain reasons.

Key words:option,barrier,martingale,risk management

在期权投资市场中,当标的资产价格如投资者预期上升时,则看涨期权的持有者获利,而看跌期权的持有者受到损失. 反之,若标的资产价格下跌时,看涨期权的持有者受到损失,而看跌期权的持有者获利. 所以,投资者能否实现有效投资从而获得资本增益,一个关键的问题是对标的资产市场价格的未来走势方向的预测是否准确. 但在不确定的市场情况下,投资者很难预料未来的标的资产价格是上升还是下降,在这种情况下预先买入看涨或看跌期权都存在很大的风险. 本文提出一种新型的期权——可转换期权. 具体地说,这种期权是指:若投资者开始买入的是看涨(看跌)期权,但在期权的有效期内的某个指定时刻之前标的资产的价格非但不上涨(下降),反而跌破(冲破)了某个预定的关卡值,即期权处于深度的虚值,则该看涨(看跌)期权自动转为看跌(看涨)期权. 由于设制了关卡,使得这种期权能根据标的资产的整体走势来进行看涨或看跌的转换,从而增加投资获利的可能性. 在投资者对标的资产市场价格未来走势判断错误或由于社会、经济、政治上的某些突发事件而引起标的资产价格发生异常变化的情况下,这种可转换期权在一定程度上能起到保护投资者收益不受损失的作用. 此外关卡检测终止时间点和关卡值可以根据投资者的具体要求而设定,使其具有一定的灵活性.

收稿日期:2006-01-09
修回日期:2006-03-20
作者简介:黄敢基(1972-),男,硕士研究生,主要从事金融统计研究。
* 广西自然科学资金项目(04047033)资助。

1 可转换期权的定义及模型的基本假设

我们定义可转换看涨期权为:若标的资产价格在期权有效期内的某一个确定时刻之前没有下降跌破关卡值,则其仍为看涨期权,但若标的资产价格跌

破了关卡值,则该看涨期权便转换为看跌期权.

类似地,可转换看跌期权定义为:若标的资产价格在期权有效期内的某一个确定时刻之前没有上升冲破关卡值,则其仍为看跌期权,但若标的资产价格上升冲破了关卡值,则该看跌期权便转换为看涨期权.

由上述定义,可转换看涨和看跌期权的到期收益 R_c 和 R_p 分别为

$$R_c = (S_T - K)^+ I_{\min\limits_{0\leqslant u\leqslant t} Su > B} + (K - S_T)^+ I_{\min\limits_{0\leqslant u\leqslant t} Su \leqslant B},$$

$$R_p = (K - S_T)^+ I_{\max\limits_{0\leqslant u\leqslant t} Su < B} + (S_T - K)^+ I_{\max\limits_{0\leqslant u\leqslant t} Su \geqslant B},$$

其中 T 为期权到期时刻,K 为敲定价,S_T 为标的资产到期价格,B 为关卡值,S_0 是标的资产初始价格,t 为预定的期权转换检测时间段的终点,对看涨期权有 $B < S_0 \leqslant K$,而对看跌期权有 $K \leqslant S_0 < B$.

假设市场满足 Black-Scholes 期权定价模型的基本假设,即市场无套利机会,没有任何税收和交易成本,投资者可以以无风险利率自由借入或贷出资金,所有的证券交易可以无限制细分,对卖空没有任何限制,且标的资产价格服从几何布朗运动,即

$$\mathrm{d}S_t = rS_t\mathrm{d}t + \sigma S_t \mathrm{d}W_t,$$

其中 S_t 表示标的资产在 t 时刻的价格,r 为无风险利率,σ 为标的资产价格波动率,W_t 为风险中性测度之下的布朗运动,$W_t \sim N(0,t)$.

2 几个引理

为了给出可转换期权的定价公式,我们先给出以下的 3 个引理:

引理 1[1] ($iT\hat{o}$ 定理) 设 $V_t = V(S_t,t)$,V 是二元可微函数,若随机过程 S_t 适合随机微分方程

$$\mathrm{d}S_t = \mu(S_t,t)\mathrm{d}t + \sigma(S_t,t)\mathrm{d}W_t,$$

其中 W_t 为布朗运动,则

$$\mathrm{d}V_t = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \mu(S_t,t)\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2(S_t,t)\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right)\mathrm{d}t + \sigma(S_t,t)\frac{\partial V}{\partial S}\mathrm{d}W_t.$$

引理 2[2] (Girsanov 变换) 设 $\Phi \in L_2^{loc}$,且 (F_t) 指数上鞅 $Z_t = \exp\{\int_0^t \Phi \mathrm{d}B - \frac{1}{2}\int_0^t \Phi_u^2 \mathrm{d}u\}$ 在 $0 \leqslant t < T(T \leqslant \infty)$ 上是 (F_t) 指数鞅(即 $EZ_t \equiv 1, 0 \leqslant t < T$),则 (F_t) 布朗运动 B 的如下"平移"

$$B_t^Q := B_t - \int_0^t \Phi_u \mathrm{d}u,$$

对于 $0 \leqslant t < T$ 是 (Ω, F_T, Q) 上 (F_t) 布朗运动,其中 Q 是 $Q(A) = E(I_A Z_t) = \int_A Z_t \mathrm{d}P$(当 $A \in F_t, t < T$ 时)在 F_{T-} 上扩张得到的概率测度.

引理 3[3] 设 W_t 是具有漂移率 μ 和波动率 $\sigma > 0$,从 0 开始的布朗运动,则对 $\forall\, t > 0$ 有

$$P(\min_{0\leqslant s\leqslant t}\{W(s)\} > a) = N\left(\frac{\mu t - a}{\sigma\sqrt{t}}\right) - e^{\frac{2a\mu}{\sigma^2}} N\left(\frac{\mu t + a}{\sigma\sqrt{t}}\right), \forall\, a < 0;$$

$$P(\operatorname{man}_{0\leqslant s\leqslant t}\{W(s)\} < a) = N\left(\frac{-\mu t + a}{\sigma\sqrt{t}}\right) - e^{\frac{2a\mu}{\sigma^2}} N\left(\frac{-\mu t - a}{\sigma\sqrt{t}}\right), \forall\, a > 0.$$

3 可转换期权的定价

3.1 连续检测关卡时可转换期权的定价

定理 1 连续检测关卡时可转换看涨期权的价值为

$$C = Ke^{-rT}N(-d_2) - S_0N(-d_1) + S_0\left[N(d_3) - \left(\frac{B}{S_0}\right)^{\frac{2r}{\sigma^2}+1}N(d_4)\right] - Ke^{-rT}\left[N(d_5) - \left(\frac{B}{S_0}\right)^{\frac{2r}{\sigma^2}-1}N(d_6)\right]; \tag{1}$$

而可转换看跌期权的价值为

$$P = S_0N(d_1) - Ke^{-rT}N(d_2) - S_0\left[N(d_3') - \left(\frac{B}{S_0}\right)^{\frac{2r}{\sigma^2}+1}N(d_4')\right] + Ke^{-rT}\left[N(d_5') - \left(\frac{B}{S_0}\right)^{\frac{2r}{\sigma^2}-1}N(d_6')\right], \tag{2}$$

其中 $d_1 = \dfrac{\ln\frac{S_0}{K} + (r + \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}$,$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$,

$$d_3 = \frac{(r + \frac{\sigma^2}{2})t - \ln\frac{B}{S_0}}{\sigma\sqrt{t}}, d_4 = \frac{(r + \frac{\sigma^2}{2})t + \ln\frac{B}{S_0}}{\sigma\sqrt{t}},$$

$$d_5 = \frac{(r - \frac{\sigma^2}{2})t - \ln\frac{B}{S_0}}{\sigma\sqrt{t}}, d_6 = \frac{(r - \frac{\sigma^2}{2})t + \ln\frac{B}{S_0}}{\sigma\sqrt{t}},$$

$d_3' = -d_3, d_4' = -d_4, d_5' = -d_5, d_6' = -d_6$.

证明 先证明(1)式成立. 由风险中性的假设知可转换看涨期权在现在时刻(假设为 0)的价格为

$$C = e^{-rT}E\{(S_T - K)^+ I_{[\min\limits_{0\leqslant u\leqslant t} S_u > B]} + (K - S_T)^+ I_{[\min\limits_{0\leqslant u\leqslant t} S_u \leqslant B]}\} = e^{-rT}E\{S_T I_{[\min\limits_{0\leqslant u\leqslant t} S_u > B]}\} - Ke^{-rT}E\{I_{[\min\limits_{0\leqslant u\leqslant t} S_u > B]}\} + e^{-rT}E(K - S_T)^+ = \mathrm{I} + \mathrm{II} + \mathrm{III}. \tag{3}$$

首先,假设现在的风险中性测度为 Q,则由引理 1 有 $S_T = S_0 e^{(r - \frac{\sigma^2}{2})T + \sigma W_T^Q}$,其中 $W_T^Q \sim N(0,T)$ 为测度 Q 之下的布朗运动. 有

$$\mathrm{I} = e^{-rT}E^Q\{S_T I_{[\min_{0\leqslant u\leqslant t} S_u > B]}\} =$$
$$S_0 E^Q e^{-\frac{\sigma^2}{2}T+\sigma W_T^Q} I_{[\min_{0\leqslant u\leqslant t} S_u > B]} \overset{\text{由引理2}}{=} S_0 P^R(\min_{0\leqslant u\leqslant t} S_u > B) =$$
$$S_0 P^R(\min_{0\leqslant u\leqslant t} S_0 e^{B_1(u)} > B) = S_0 P^R(\min_{0\leqslant u\leqslant t} B_1(u) >$$
$$\ln\frac{B}{S_0}) \overset{\text{由引理3}}{=} S_0[N(\frac{(r+\frac{\sigma^2}{2})t - \ln\frac{B}{S_0}}{\sigma\sqrt{t}}) -$$
$$(\frac{B}{S_0})^{\frac{2r}{\sigma^2}+1} N(\frac{(r+\frac{\sigma^2}{2})t + \ln\frac{B}{S_0}}{\sigma\sqrt{t}})], \tag{4}$$

其中 R 为 Q 的等价鞅测度，在 R 之下有 $S_u = S_0 e^{(r+\frac{\sigma^2}{2})u+\sigma W_u^R} = S_0 e^{B_1(u)}$，而 $W_u^R \sim N(0,u)$ 及 $B_1(u) \sim N((r+\frac{\sigma^2}{2})u, \sigma^2 u)$ 为测度 R 之下的布朗运动.

其次，在测度Q之下利用引理3可求得(3)式中Ⅱ项的值为

$$\mathrm{II} = -Ke^{-rT}[N(\frac{(r-\frac{\sigma^2}{2})t - \ln\frac{B}{S_0}}{\sigma\sqrt{t}}) -$$
$$(\frac{B}{S_0})^{\frac{2r}{\sigma^2}-1} N(\frac{(r-\frac{\sigma^2}{2})t + \ln\frac{B}{S_0}}{\sigma\sqrt{t}})]. \tag{5}$$

另外，(3)式中Ⅲ项为标准的欧式看跌期权，其值为

$$\mathrm{III} = Ke^{-rT}N(-\frac{\ln\frac{S_0}{K} + (r-\frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}) -$$
$$S_0 N(-\frac{\ln\frac{S_0}{K} + (r+\frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}). \tag{6}$$

联合(4)，(5)，(6)式可得(1)式成立，类似的可以证明(2)式成立.

定理证毕.

3.2 离散检测关卡时可转换期权的定价

定理2 离散检测关卡时可转换看涨期权的价值为

$$C = Ke^{-rT}N(-d_2) - S_0N(-d_1) + S_0N(c_1, c_2,\cdots,c_n,\textstyle\sum_n) - Ke^{-rT}N(c_1',c_2',\cdots,c_n',\textstyle\sum_n); \tag{7}$$

而可转换看跌期权的价值为

$$P = S_0N(d_1) - Ke^{-rT}N(d_2) + Ke^{-rT}N(h_1,h_2,\cdots,h_n,\textstyle\sum_n) - S_0N(h_1',h_2',\cdots,h_n',\textstyle\sum_n), \tag{8}$$

其中 $c_k = \dfrac{\ln\frac{S_0}{B} + (r+\frac{\sigma^2}{2})t_k}{\sigma\sqrt{t_k}}$，$c_k' = \dfrac{\ln\frac{S_0}{B} + (r-\frac{\sigma^2}{2})t_k}{\sigma\sqrt{t_k}}$，$h_k = -c_k'$，$h_k' = -c_k$，$k=1,2,\cdots,n$，$\sum_n = [\sigma_{lm}]$，$\sigma_{lm} = \sqrt{\dfrac{t_l}{t_m}}$，$1\leqslant l,m\leqslant n$.

证明 先证明(7)式成立.假设检测关卡的时间点为 $t_1,t_2,\cdots,t_n$，$0\leqslant t_i\leqslant t$，$i=1,2,\cdots,n$，相应时点上的股票价格为 $S_{t_1},S_{t_2},\cdots,S_{t_n}$，则可转换看涨期权在现在时刻的价值为

$$C = e^{-rT}E\{(S_T-K)^+ I_{[\min(S_{t_1},S_{t_2},\cdots,S_{t_n})>B]} +$$
$$(K-S_T)^+ I_{[\min(S_{t_1},S_{t_2},\cdots,S_{t_n})\leqslant B]}\} =$$
$$e^{-rT}E\{S_T I_{[\min(S_{t_1},S_{t_2},\cdots,S_{t_n})>B]}\} -$$
$$Ke^{-rT}E\{I_{[\min(S_{t_1},S_{t_2},\cdots,S_{t_n})>B]}\} + e^{-rT}E(K-S_T)^+ =$$
$$\mathrm{I} + \mathrm{II} + \mathrm{III}. \tag{9}$$

下面分别求(9)式中各项的值，假设现在风险中性测度为 Q，则有

$$I = e^{-rT}E\{S_T I_{[\min(S_{t_1},S_{t_2},\cdots,S_{t_n})>B]}\} =$$
$$S_0E^Q e^{-\frac{\sigma^2}{2}T+\sigma W_T^Q} I_{[\min(S_{t_1},S_{t_2},\cdots,S_{t_n})>B]} \overset{\text{由引理2}}{=}$$
$$S_0E^R I_{[\min(S_{t_1},S_{t_2},\cdots,S_{t_n})>B]} = S_0P^R(S_{t_1}>B, S_{t_2}>B,\cdots,$$
$$S_{t_n}>B), \tag{10}$$

(10)式中 R 为 Q 的等价鞅测度，假设现在时刻为 $t_0 = 0$，则在任一个关卡检测的时间点有 $\{t_k\}$，$k=1,2,\cdots,n$，有

$$S_{t_k} = S_0 e^{(r+\frac{\sigma^2}{2})(t_k-t_0)+\sigma W_{t_k}^R} = S_0 e^{(r+\frac{\sigma^2}{2})t_k + \sigma(W_{t_k}^R - W_{t_0}^R)} =$$
$$S_0 e^{(r+\frac{\sigma^2}{2})t_k + \sum_{j=1}^k X_j}, \tag{11}$$

其中 $X_j = \sigma(W_{t_j}^R - W_{t_{j-1}}^R) \sim N(0,\sigma^2\Delta t_j)$，$\Delta t_j = t_j - t_{j-1}$. 由布朗运动的性质知 X_j 相互独立，从而 $\sum_{j=1}^k X_j \sim N(0,\sigma^2 t_k)$. 利用(11)式对 $S_{t_k} > B$，$k=1,2,\cdots,n$，作等价变形有 $\{S_{t_k} > B\} \Leftrightarrow \{\ln\frac{S_{t_k}}{S_0} > \ln\frac{B}{S_0}\} \Leftrightarrow$

$\{-\dfrac{1}{\sigma\sqrt{t_k}}\sum_{j=1}^k X_j < \dfrac{\ln\frac{S_0}{B} + (r+\frac{\sigma^2}{2})t_k}{\sigma\sqrt{t_k}}\}$，记 $Z_k = -\dfrac{1}{\sigma\sqrt{t_k}}\sum_{j=1}^k X_j$，$c_k = \dfrac{\ln\frac{S_0}{B} + (r+\frac{\sigma^2}{2})t_k}{\sigma\sqrt{t_k}}$，$k=1,2,\cdots,n$，则有

$$S_{t_k} > B \Leftrightarrow Z_k < c_k, \tag{12}$$

由 $\sum_{j=1}^k X_j \sim N(0,\sigma^2 t_k)$ 知 $Z_k \sim N(0,1)$，$k=1,2,\cdots,n$. 从而 $Z_1,Z_2,\cdots,Z_n$ 的联合分布为 n 维正态分布，其期望为0向量，协方差为 $\sum_n = [\sigma_{lm}]$，$1\leqslant l,m\leqslant n$，设 $l\leqslant m$ 则

$$\sigma_{lm}=\operatorname{cov}(Z_l,Z_m)=\frac{1}{\sigma^2\sqrt{t_lt_m}}\operatorname{cov}(\sum_{j=1}^{l}X_l,\sum_{j=1}^{m}X_m)=\frac{1}{\sigma^2\sqrt{t_lt_m}}Var(\sum_{j=1}^{l}X_j)=\sqrt{\frac{t_l}{t_m}}. \tag{13}$$

所以由(10)~(13)式即得

$$\mathrm{I}=S_0P^R(Z_1<c_1,Z_2<c_2,\cdots,Z_n<c_n)=S_0N(c_1,c_2,\cdots,c_n,\sum\nolimits_n). \tag{14}$$

类似的可以计算(9)式中的 Ⅱ 项的值得

$$\mathrm{II}=-Ke^{-rT}N(c_1',c_2',\cdots,c_n',\sum\nolimits_n), \tag{15}$$

其中 $c_k'=\dfrac{\ln\dfrac{S_0}{B}+(r-\dfrac{\sigma^2}{2})t_k}{\sigma\sqrt{t_k}}$,而协方差阵 $\sum_n=[\sigma_{lm}]$ 与(14)式中所定义的相同.

另外,(9)式中 Ⅲ 项为标准的欧式看跌期权的价值,其值为

$$\mathrm{III}=e^{-rT}E(K-S_T)^+=Ke^{-rT}N(-d_2)-S_0N(-d_1), \tag{16}$$

其中 d_1,d_2 如 3.1 中所定义.

联合(14)~(16)式即证得(7)式成立,类似可证(8)式成立.

定理证毕.

4 可转换期权价格的分析

由定义知影响可转换期权价格的因素有:S,K,r,σ,T,t,B,其中前 5 个因素也是无红利支付的标准欧式期权价格的影响因素.我们以连续检测关卡时可转换看涨期权为例,考察当影响期权价格的某个因素改变,而其他因素保持不变时相应的期权价格变化情况,并与标准的无红利支付的欧式看涨期权价格变化情况进行比较分析.对于可转换看跌期权价格对各个价格影响因素的依赖关系也可以类似进行讨论.

我们分别让 S,K,r,σ 中某一个因素改变,而其余因素不变时,对相应的可转换看涨期权价格和标准欧式看涨期权价格采用 Matlab 数学软件编程计算和画图.两种期权的价格变化情况如图 1(其中取 $S_0=10,K=15,r=0.05,\sigma=0.3,T=2,t=1,B=6$).

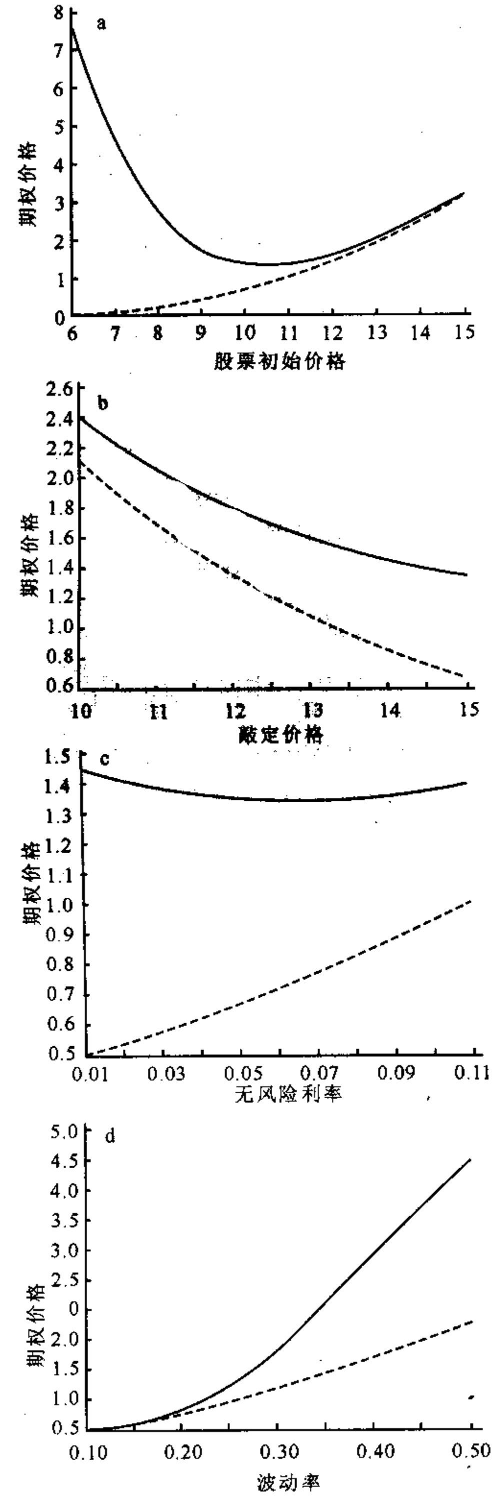

图 1 期权价格的变化关系

a.对股票初始价格的依赖;b.对敲定价格的依赖;c.对无风险利率的依赖;d.对波动率的依赖。

----:标准欧式看涨期权价格曲线;——:可转换看涨期权价格曲线

由图 1a 可知,标准欧式看涨期权价格随股票初始价格的增加而增加.对于可转换看涨期权,当股票初始价格大于一定的值时,期权价格也随股票价格的增加而增加,初始股票价格越接近敲定价格时,该期权价格与标准的欧式看涨期权价格就越接近,也即是说,在这种情况下,股票价格下降触及关卡的可

(下转第 32 页)

社,1995.
[3] DAVID HAND. 数据挖掘原理[M]. 张银奎,译. 北京:电子工业出版社,2003.
[4] 李菊芳,谭跃进. 组合优化近似搜索算法中的超启发式发展趋势[J]. 计算机与现代化,2004,106(6):7-8.

(责任编辑:凌汉恩 邓大玉)

(上接第29页)

能性很小,故此时可转换期权就近似于标准的欧式看涨期权. 而当股票价格小于一定的值时,可转换看涨期权价格随股票价格的减少而增加,这是因为股票价格越低时,触及关卡从而发生期权转换的可能性就越大,此时该期权潜在的获利机会比标准的欧式看涨期权要大得多,故其价格不降反而升. 当股票的初始价格等于关卡值时,即期权一开始便满足转换的条件,其价格即为标准看跌期权的价格.

图1b表明两种看涨期权的价格都随敲定价格的增加而减少,但由于可转换看涨期权具有转换为看跌期权的潜在可能性,故其价格随敲定价格增加而减少的幅度比标准欧式看涨期权的要小.

由图1c知,与标准欧式看涨期权的价格随无风险利率增加而增加不同,当无风险利率增加到一定值时,可转换看涨期权价格随无风险利率的增加而增加,而当无风险利率下降到一定程度时,该期权价格则随无风险利率的减少而增加. 这是由于在风险中性假设下,股票的预期收益率为无风险利率,所以当无风险利率上升或下降时,将导致相应的股票价格上涨或下跌,故相应的期权价格变化情况与图1类似.

图1d说明了两种看涨期权价格都随股票价格波动率的增加而增加,但可转换看涨期权价格对波动率的敏感度更大. 这是因为当波动率增加时,股票价格上涨和下降的可能性加大,当股价上涨时,两种看涨期权的获利机会都增大,但当股价下跌时,标准看涨期权获利机会减少,而可转换看涨期权因有转换为看跌期权的可能性而保持有更多潜在的获利机会,故波动率高时它的价格也相对标准看涨期权高.

由于对于欧式期权来说,它的实施机会只有一次,因此期权有效期的长短与期权价格没有必然的关系,所以在此我们没有对两者的关系进行讨论.

5 结束语

对金融衍生产品的创新和给予科学定价可以促进金融市场的繁荣和稳定. 本文所提出的这种可转换期权,通过对其价格的分析表明,由于具有可转换性,当现实市场中由各种不确定因素引起的股票价格、无风险利率、波动率等因素发生较大变化时,相比标准欧式期权该新型期权具有风险小、潜在获利机会大的优点. 这为广大投资者和风险管理者提供了一种新的选择.

参考文献:

[1] 姜礼尚. 期权定价的数学模型和方法[M]. 北京:高等教育出版社,2003:69-70.
[2] 龚光鲁. 随机微分方程引论[M]. 第2版. 北京:北京大学出版社,2000:67-71.
[3] URS M GRUBER. Pricing barrier and asian options with an emphasis on monte carlo methods [D]. Priliminary Version,1997:23-27.

(责任编辑:韦廷宗)