关于最小支集样条小波性质的探讨

Discussion on the Properties of Minimum Support Spline Wavelets

徐应祥
XU Ying-xiang

(西北师范大学数学与信息科学学院,甘肃兰州 730070)
(College of Mathematics and Information Science, Northwest Normal University, Lanzhou, Gansu, 730070, China)

摘要:利用B-样条函数 $N_m(x)$ 的性质证明最小支集样条小波函数的其它7个性质.

关键词:小波 最小支集 样条 性质
中图法分类号:O241.82 **文献标识码**:A **文章编号**:1002-7378(2007)01-0023-03

Abstract: Seven more properties of minimum support spline wavelet are proved by means of the properties of B-spline function $N_m(x)$.

Key words: wavelet, minimum support, spline, properties

1992年崔锦泰[美](Chui. C. K)和王建忠(Wang. J. Z)[1]构造出了最小支集样条小波,该小波具有有很多良好的性质,并且得到了广泛的应用.最小支集样条小波是以B-样条函数作为尺度函数构造出来的.现已知其具有很多很好的性质,如:有确定的解析表达式(而大多数小波函数通常不能写出具体的解析表达式),具有对称性、单正交性和消失矩等[1～3].

由于最小支集样条小波函数的解析表达式中的 $\Psi_m(x)$ 可表示成B-样条函数 $N_m(x)$ 有线性组合,故由B-样条函数 $N_m(x)$ 的性质[3,4]可以证明最小支集样条小波函数的其他一些性质,本文就此进行了一些探讨.

性质1 对于每个 $f(x)\in C$,有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\Psi_m(\frac{x}{2})\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{3m-2}q_n[\int_0^1\cdots\int_0^1 f(x_1+x_2+\cdots+x_m+n)\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_m]. \quad (1)$$

证明 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\Psi_m(\frac{x}{2})\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)[\sum_{n=0}^{3m-2}q_nN_m(x-n)]\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{3m-2}q_n\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)N_m(x-n)\mathrm{d}x.$

而由B-样条函数的性质有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)N_m(x-n)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}f(y_1+n)N_m(y_1)\mathrm{d}y_1=\int_{-\infty}^{+\infty}f(y_1+n)[\int_0^1N_{m-1}(y_1-t_1)\mathrm{d}t_1]\mathrm{d}y_1=\int_0^1[\int_{-\infty}^{+\infty}f(y_1+n)N_{m-1}(y_1-t_1)\mathrm{d}y_1]\mathrm{d}t_1=\int_0^1[\int_{-\infty}^{+\infty}f(y_2+t_1+n)N_{m-1}(y_2)\mathrm{d}y_2]\cdot\mathrm{d}t_1=\int_0^1\{\int_{-\infty}^{+\infty}f(y_2+t_1+n)[\int_0^1N_{m-1}(y_2-t_2)\mathrm{d}t_2]\mathrm{d}y_2\}\mathrm{d}t_1=\int_0^1\int_0^1[\int_{-\infty}^{+\infty}f(y_2+t_1+n)N_{m-1}(y_2-t_2)\mathrm{d}y_2]\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2=\cdots=\int_0^1\cdots\int_0^1[\int_{-\infty}^{+\infty}f(t_1+t_2+\cdots+t_m+n)N_1(t_m)\mathrm{d}t_m]\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2\cdots\mathrm{d}t_{m-1}=\int_0^1\cdots\int_0^1f(t_1+t_2+\cdots+t_m+n)\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2\cdots\mathrm{d}t_m.$$

性质2 对于每个 $g(x)\in C^m$,有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}g^{(m)}(x)\Psi_m(\frac{x}{2})\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{3m-2}\sum_{l=0}^{m}(-1)^{m-l}\binom{m}{l}q_ng(l+n). \quad (2)$$

证明 由性质1,对于 $\int_{-\infty}^{+\infty}g^{(m)}(x)\Psi_m(\frac{x}{2})\mathrm{d}x=$

收稿日期:2006-06-30
作者简介:徐应祥(1978-),男,助教,硕士,主要从事小波分析及应用的研究。

$\sum_{n=0}^{3m-2} q_n[\int_0^1 \cdots \int_0^1 g^{(m)}(x_1 + x_2 + \cdots + x_m + n)\mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_m]$ 的右端：

(i) 当 $m=1$ 时，有 $\int_0^1 g'(x_1+n)\mathrm{d}x_1 = g(x_1+n)|_0^1 = g(1+n)-g(n)$.

(ii) 假设当 $m=k$ 时，有 $q_n\int_0^1 \cdots \int_0^1 g^{(k)}(x_1+x_2+\cdots+x_k+n)\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_k = \sum_{l=0}^{k}(-1)^{k-l}\binom{k}{l}q_n g(l+n)$.

那么当 $m=k+1$ 时

$$q_n\int_0^1 \cdots \int_0^1 g^{(k+1)}(x_1+x_2+\cdots+x_{k+1}+n)\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_{k+1} = \int_0^1 \sum_{l=0}^{k}(-1)^{k-l}\binom{k}{l}q_n g'(l+n+x_{k+1})\mathrm{d}x_{k+1} = [\sum_{l=0}^{k}(-1)^{k-l}\binom{k}{l}q_n g(l+n+x_{k+1})]|_0^1 = \sum_{l=0}^{k}(-1)^{k-l}\binom{k}{l}q_n g(l+n+1) - \sum_{l=0}^{k}(-1)^{k-l}\binom{k}{l}q_n g(l+n) = \sum_{l=1}^{k+1}(-1)^{k-l+1}\binom{k}{l-1}q_n g(l+n) - \sum_{l=0}^{k}(-1)^{k-l}\binom{k}{l}q_n g\cdot(l+n) = \sum_{l=0}^{k}(-1)^{k-l+1}[\binom{k}{l-1}+\binom{k}{l}]q_n g(l+n) - (-1)^{k-0}\binom{k}{0}q_n g(l+n) + (-1)^{k-(k+1)+1}\binom{k}{k}q_n g(k+1+n) = \sum_{l=1}^{k}(-1)^{k+1-l}\binom{k+1}{l}q_n g(l+n) + (-1)^{k+1-0}\binom{k}{0}q_n g(l+n) + (-1)^{k+1-(k+1)}\binom{k+1}{k+1}q_n g(k+1+n) = \sum_{l=0}^{k+1}(-1)^{k+1-l}\binom{k+1}{l}q_n g(l+n).$$

故由归纳法，对任意的正整数 m，有

$$q_n\int_0^1 \cdots \int_0^1 g^{(m)}(x_1+x_2+\cdots+x_m+n)\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_m = \sum_{l=0}^{m}(-1)^{m-l}\binom{m}{l}q_n g(l+n).$$

所以有 $\int_{-\infty}^{+\infty} g^{(m)}(x)\Psi_m(\frac{x}{2})\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{3m-2}\sum_{l=0}^{m}(-1)^{m-l}\binom{m}{l}q_n g(l+n)$.

性质 3 $\Psi_m(x) = \frac{1}{(m-1)!}\sum_{n=0}^{3m-2}\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{m}{k}q_n(2x-n-k)_+^{m-1}$，$(m\geqslant 2)$. (3)

证明 由B-样条函数的性质 $N_m(x) = \frac{1}{(m-1)!}\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{m}{k}(x-k)_+^{m-1}$，$(m\geqslant 2)$ 立得.

性质 4 $\sum_{n=0}^{3m-2}q_n = 0$，且 $q_{3m-2-n} = (-1)^{3m-2}q_n$. (4)

证明 由最小支集样条小波函数的性质 $\int_{-\infty}^{+\infty}\Psi_m(x)\mathrm{d}x = 0$ 及B-样条的性质 $\int_{-\infty}^{+\infty}N_m(x)\mathrm{d}x = 1$ 有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\Psi_m(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty}[\sum_{n=0}^{3m-2}q_n N_m(2x-n)]\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{3m-2}q_n\int_{-\infty}^{+\infty}N_m(2x-n)\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{3m-2}q_n，故 \sum_{n=0}^{3m-2}q_n = 0.$$

又由样条函数的性质[3,4]知 $N_m(\frac{m}{2}+x) = N_m(\frac{m}{2}-x)$，即有 $N_m(m-x) = N_m(x)$，所以有

$$q_{3m-2-n} = \frac{(-1)^{3m-2-n}}{2^{m-1}}[\sum_{l=0}^{m}\binom{m}{l}N_{2m}(3m-2-n-l+1)] = \frac{(-1)^{3m-2-n}}{2^{m-1}}[\sum_{l=0}^{m}\binom{m}{l}N_{2m}(-m+2+n+l-1)] = \frac{(-1)^{3m-2-n}}{2^{m-1}}[\sum_{l=0}^{m}\binom{m}{l}N_{2m}(n-(m-l)+1)] = \frac{(-1)^{3m-2-n}}{2^{m-1}}[\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{m-k}N_{2m}\cdot(n-k+1)] = (-1)^{3m-2}\frac{(-1)^{-n}}{2^{m-1}}[\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}N_{2m}\cdot(n-k+1)] = (-1)^{3m-2}q_n.$$

性质 5 对 $\forall\, x\in R$，有 $\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\Psi_m(x-\frac{k}{2}) = 0$. (5)

证明 由样条函数的性质[3,4]对 $\forall\, x\in R$，有 $\sum_{k=-\infty}^{+\infty}N_m(x-k) = 0$，因此由性质4可得

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\Psi_m(x-\frac{k}{2}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\sum_{n=0}^{3m-2}q_n N_m(2x-k-n) = \sum_{n=0}^{3m-2}q_n\sum_{k=-\infty}^{+\infty}N_m[(2x-n)-k] = \sum_{n=0}^{3m-2}q_n = 0.$$

性质 6 $\Psi'_m(x) = 2q_0N_{m-1}(2x) + 2\sum_{n=1}^{3m-2}(q_n-q_{n-1})N_{m-1}(2x-n) - 2q_{3m-2}N_{m-1}(2x-3m+1)$. (6)

证明 由B-样条函数的性质 $N'_m(x) = N_{m-1}(x) - N_{m-1}(x-1)$ 可知，

$$\Psi'_m(x) = \sum_{n=0}^{3m-2}q_n[N_m(2x-n)]' =$$

$\sum_{n=0}^{3m-2} 2q_n[N_{m-1}(2x-n) - N_{m-1}(2x-n-1)] = 2[\sum_{n=0}^{3m-2} q_n N_{m-1}(2x-n) - \sum_{n=0}^{3m-2} q_n N_{m-1}(2x-n-1)] = 2[\sum_{n=0}^{3m-2} q_n N_{m-1}(2x-n) - \sum_{k=1}^{3m-1} q_{k-1} N_{m-1}(2x-k)] = 2[q_0 N_{m-1}(2x) + \sum_{n=1}^{3m-2} q_n N_{m-1}(2x-n) - \sum_{k=1}^{3m-2} q_{k-1} N_{m-1}(2x-k) - q_{3m-2} N_{m-1}(2x-3m+1)] = 2q_0 N_{m-1}(2x) + 2\sum_{n=1}^{3m-2} (q_n - q_{n-1}) N_{m-1}(2x-n) - 2q_{3m-2} N_{m-1}(2x-3m+1)$.

性质 7 $\Psi_m(x) = \frac{1}{m-1}\{2xq_0 N_{m-1}(2x) + \sum_{n=1}^{3m-2}[q_n(2x-n) + q_{n-1}(m+n-1-2x)]N_{m-1}(2x-n) + q_{3m-2}(4m-2-2x)N_{m-1}(2x-3m+1)\}$. (7)

证明 由 B- 样条的性质 $N_m(x) = \frac{x}{m-1}N_{m-1}(x) + \frac{m-x}{m-1}N_{m-1}(x-1)$,有

$\Psi_m(x) = \sum_{n=0}^{3m-2} q_n[\frac{2x-n}{m-1}N_{m-1}(2x-n) + \frac{m-(2x-n)}{m-1}N_{m-1}(2x-n-1)] = \frac{1}{m-1}\sum_{n=0}^{3m-2} q_n(2x-n)N_{m-1}(2x-n) + (m+n-2x)N_{m-1}(2x-n-1)] = \frac{1}{m-1}[\sum_{n=0}^{3m-2} q_n(2x-n)N_{m-1}(2x-n) + \sum_{n=0}^{3m-2} q_n(m+n-2x)N_{m-1}(2x-n-1)] = \frac{1}{m-1}[\sum_{n=0}^{3m-2} q_n(2x-n)N_{m-1}(2x-n) + \sum_{k=1}^{3m-1} q_n(m+k-1-2x)N_{m-1}(2x-k)] = \frac{1}{m-1}[2xq_0 N_{m-1}(2x) + \sum_{n=1}^{3m-2} q_n(2x-n)N_{m-1}(2x-n) + \sum_{n=1}^{3m-2} q_{k-1}(m+k-1-2x)N_{m-1}(2x-k) + q_{3m-2}(4m-2-2x)N_{m-1}(2x-3m+1)] = \frac{1}{m-1}\{2xq_0 N_{m-1}(2x) + \sum_{n=1}^{3m-2}[q_n(2x-n) + q_{n-1}(m+n-1-2x)]N_{m-1}(2x-n) + q_{3m-2}(4m-2-2x)N_{m-1}(2x-3m+1)\}$.

参考文献:

[1] CHUI C K, WANG J Z. On compactly supported spline wavelet and a duality principle[J]. Trans Amert Math Soc, 1992, 330: 903-916.

[2] 金坚明,徐应祥,薛鹏翔. 最小支集样条小波有限元[J]. 计算数学, 2006, 28(1): 89-93.

[3] 崔锦泰(美). 小波分析导论[M]. 程正兴,译. 西安:西安交通大学出版社, 1995.

[4] 孙家昶. 样条函数与计算几何[M]. 北京:科学出版社, 1982.

(责任编辑:韦廷宗)

(上接第 22 页)

[4] 许先云,杨永清. 不确定 AHP 判断矩阵的一致性逼近与排序方法[J]. 系统工程理论与实践, 1998, 18(2): 19-22.

[5] 胡宝清. 模糊理论基础[M]. 武汉:武汉大学出版社, 2004.

[6] 吕跃进,王玉燕,覃柏英. 区间数的相容性间数互补判断矩阵的相容性研究[J]. 广西大学学报:自然科学版, 2004, 29(3): 179-182.

[7] 吴江,黄登仕. 多属性决策中区间数偏好信息的一致化方法[J]. 系统工程理论与实践, 2003, 12(4): 359-362.

[8] 魏毅强,刘进生,王绪柱. 不确定型 AHP 中判断矩阵的一致性概念及权重[J]. 系统工程理论与实践, 1994, 14(4): 16-22.

(责任编辑:凌汉恩 邓大玉)