广西科学院学报 2007,23(1):20～22,25
Journal of Guangxi Academy of Sciences Vol. 23,No. 1 February 2007

区间数互补判断矩阵中元素的运算与排序算法*

Elementary Operation and Ranking Algorithm in the Interval Number Complementary Judgement Matrix

史文雷,吕跃进,徐改丽
SHI Wen-lei,Lü Yue-jin,Xü Gai-li

(广西大学数学与信息科学学院,广西南宁 530004)
(College of Mathematics and Information Science,Guangxi University,Nanning,Guangxi,530004,China)

摘要:分析区间数互补判断矩阵中已有的元素运算法则,重新定义区间数互补判断矩阵中一些元素的运算,给出将区间数互补矩阵转换为一致性矩阵的定理,并利用互反和互补之间的转换,得到一个区间数互补判断矩阵的排序算法.

关键词:判断矩阵 一致性 运算法则 排序算法

中图法分类号:O223;C934 **文献标识码**:A **文章编号**:1002-7378(2007)01-0020-03

Abstract:This paper analyes the existent elementary operation rule of interval complementary judgement matrix,points out its defects,redefines the interval number operation,and puts forward the consistent transformation theorem. Transformation between the reciprocal and the complementary helps to derive a ranking algorithm.

Key words:judgement matrix,consistency,operation rule,ranking algorithm

层次分析法是一种将定性与定量相结合,将人的主观判断用数量形式表达和处理的科学决策方法. 随着社会的发展,在现实生活中,由于受到专家知识水平和能力结构,事物本身的复杂性和不确定性的影响,同时由于模糊判断本身更符合人们的思维习惯等原因,专家给出的判断往往不是以确定的数表示的,而是以区间数等形式给出的. 从而在构造判断矩阵时可得到一种区间数互补判断矩阵. 对于区间数互补判断矩阵中的一些元素的运算,现有的运算法则已不能正确表示出此实际意义,更为严重的是用已有的运算法则得到的却是有悖常理的结论,因此有必要重新研究区间数的运算法则. 目前关于区间数互反判断矩阵中元素的运算已经有一些结论[1],而关于区间数互补判断矩阵还没有文献涉及. 同时关于区间数互补判断矩阵的其它理论还很不完善,如一致性[2]、排序[3]等.

本文分析区间数互补判断矩阵中已有的元素运算法则,指出其中的一些不足,并重新定义一些元素的运算,给出将区间数互补矩阵转换为一致性矩阵的定理,并利用互反和互补之间的转换,得到一个区间数互补判断矩阵的排序算法.

1 问题的提出

为方便,记 $N=\{1,2,\cdots,n\}$,$A,B,C,D,\cdots$ 表示区间数,$a,b,c,d,\cdots$ 表示实数,$\hat{A},\hat{B},\hat{C},\hat{D},\cdots$ 表示区间数判断矩阵,$\widetilde{A},\widetilde{B},\widetilde{C},\widetilde{D},\cdots$ 表示数字判断矩阵.

定义 1[4] 记 R 为实数集,称闭区间 $A=[a^-,a^+]$ 为区间数,其中 $a^-,a^+\in R,a^-\leqslant a^+$.

定义 2[4] 设 $A=[a^-,a^+],B=[b^-,b^+]$ 为任两个区间数,则区间数四则运算分别为

$A+B=[a^-+b^-,a^++b^+]$,

$A\cdot B=[a^-\cdot b^-,a^+\cdot b^+]$,特别的

$\lambda A=[\lambda a^-,\lambda a^+]$($\lambda$ 为一正实数),

$\frac{A}{B}=[\frac{a^-}{b^+},\frac{a^+}{b^-}]$,特别 $\frac{1}{B}=[\frac{1}{b^+},\frac{1}{b^-}]$,

---

收稿日期:2006-07-06
作者简介:史文雷(1979-),男,硕士研究生,主要从事预测与决策研究。
*广西大学科研基金(X032016)资助项目。

$A = B$ 当且仅当 $a^- = b^-, a^+ = b^+$.

定义 3[5] 设 $A = [a^-, a^+], B = [b^-, b^+]$ 为任两个区间数,则

$$A - B = [a^- - b^+, a^+ - b^-],$$
$$-B = [-b^+, -b^-].$$

定义 4[4] 称判断矩阵 $\hat{A} = (A_{ij})_{n\times n}$ 为区间数互反判断矩阵,如果它满足

(1) $A_{ii} = 1$;

(2) $A_{ij} = [a_{ij}^-, a_{ij}^+], \frac{1}{9} \leqslant a_{ij}^- \leqslant a_{ij}^+ \leqslant 9$;

(3) $A_{ij} = 1/A_{ji}$.

当 $\forall\, i, j \in \mathbf{N}$, $a_{ij}^- = a_{ij}^+$ 时,则 $\hat{A}$ 退化为数字互反判断矩阵.

定义 5[6] 称 $\hat{A} = (A_{ij})_{n\times n}$ 为区间数互补判断矩阵,如果它满足

(1) $A_{ii} = [0.5, 0.5]\ \forall\, i \in \mathbf{N}$;

(2) $A_{ij} = 1 - A_{ji}, i \neq j$;

(3) $A_{ij} = [a_{ij}^-, a_{ij}^+], 0 \leqslant a_{ij}^- \leqslant a_{ij}^+ \leqslant 1$.

当 $\forall\, i, j \in \mathbf{N}$, $a_{ij}^- = a_{ij}^+$ 时,则 $\hat{A}$ 退化为数字互补判断矩阵.

定义 6[7] 称区间数互补判断矩阵 $\hat{A} = (A_{ij})_{n\times n}$ 为一致性区间数互补判断矩阵,如果它满足 $A_{ij} + A_{jk} = A_{ik} + A_{jj}$.

由区间数互补判断矩阵的构造,可知 $A_{ij} - A_{ij} = 0$ 并且 $A_{ij} + A_{ji} = 1$,但事实上,依据区间数的运算法则得到有悖常理的结论.

例 1 设 $A_{ij} = [0.2, 0.3]$,根据定义 6,知矩阵中对应的元素

$$A_{ji} = 1 - A_{ij} = 1 - [0.2, 0.3] = [0.7, 0.8],$$

但此时

$$A_{ij} + A_{ji} = [0.2 + 0.7, 0.3 + 0.8] \neq 1,$$

并且

$$A_{ij} - A_{ij} = [0.2 - 0.3, 0.3 - 0.2] \neq 0,$$

针对这一问题,本文对区间数的运算作进一步研究.

2 取值相关元素的定义

对于区间数互反判断矩阵,由于它的元素 $A = [a^-, a^+]$ 表示方案的重要程度之比,因此它被唯一的表示成 $A = \{x \mid x = (a^-)^{\lambda}(a^+)^{1-\lambda}, \lambda \in [0,1]\}$[1],而区间数互补矩阵中的元素表示方案的重要程度之差,因此其中的元素可以唯一的表示成以下形式.

引理 1 设 $A = [a^-, a^+]$ 为区间数互补判断矩阵中的元素,则

$$A = \{x \mid x = \lambda a^- + (1-\lambda) a^+, \lambda \in [0,1]\}.$$

证明 令 $L(\lambda) = \lambda a^- + (1-\lambda)a^+ = (a^- - a^+)\lambda + a^+$,

显然此函数为闭区间上的单调递减函数,则

$$\max L(\lambda) = L(0) = a^+,$$
$$\min L(\lambda) = L(1) = a^-,$$

从而

$$A = \{x \mid x = \lambda a^- + (1-\lambda)a^+, \lambda \in [0,1]\}.$$

定义 7[1] 设 $A = [a^-, a^+], B = [b^-, b^+]$ 为两个区间数,如果取定 $\forall\, x \in A$,都存在唯一的 $y \in B$ 与之对应,反之亦然,则称区间数 A, B 是取值相关的两个区间数,并称 x 与 y 为一对对应值.

定义 8 设 $A = [a^-, a^+], B = [b^-, b^+]$ 为两个取值相关的区间数,

(1) 如果对任意的 $x = \lambda a^- + (1-\lambda)a^+ \in A, \lambda \in [0,1]$ 它在 B 中的对应值为 $y = \lambda b^- + (1-\lambda)b^+$,则称 $A = [a^-, a^+], B = [b^-, b^+]$ 是取值一致的.否则称 A, B 是取值不一致的[1].

(2) 如果对任意的 $x = \lambda a^- + (1-\lambda)a^+ \in A, \lambda \in [0,1]$ 它在 B 中的对应值为 $y = (1-\lambda)b^- + \lambda b^+$,则称 $A = [a^-, a^+], B = [b^-, b^+]$ 是取值互补的.

3 取值相关元素的运算

引理 2 设 $A = [a^-, a^+], B = [b^-, b^+]$ 为取值一致的两个区间数,则

$$A - B = [\min\{(a^- - b^-), (a^+ - b^+\}, \max\{(a^- - b^-), (a^+ - b^+)\}].$$

证明 由取值一致性,并令

$$L(\lambda) = \lambda a^- + (1-\lambda)a^+ - \lambda b^- - (1-\lambda)b^+ = (a^- - a^+ - b^- + b^+)\lambda + a^+ - b^+,$$

由闭区间上的一次函数的性质得

$$L(\lambda) = [\min\{L(0), L(1)\}, \max\{L(0), L(1)\}],$$

即

$$L(\lambda) = [\min\{(a^+ - b^+), (a^- - b^-)\}, \max\{(a^+ - b^+), (a^- - b^-)\}].$$

引理 3 设 $A = [a^-, a^+], B = [b^-, b^+]$ 为取值互补的两个区间数,则

$$A + B = [\min\{(a^- + b^+), (a^+ + b^-)\}, \max\{(a^- + b^+), (a^+ + b^-)\}].$$

证明 由取值互补性,并令

$$L(\lambda) = \lambda a^- + (1-\lambda)a^+ + (1-\lambda)b^- + \lambda b^+ = (a^- - a^+ - b^- + b^+)\lambda + a^+ + b^-,$$

由闭区间上的一次函数的性质知

$$L(\lambda) = [\min\{L(0), L(1)\}, \max\{L(0),$$

$L(1)\}]$，

即

$$L(\lambda) = [\min\{(a^- + b^+), (a^+ + b^-), \max\{(a^- + b^+), (a^+ + b^-)\}].$$

综上讨论可以得到区间数取值相关元素的加法与减法的运算定义.

定义 9 设 $A=[a^-, a^+]$，$B=[b^-, b^+]$ 为区间数互补判断矩阵中的任两个区间数，则区间数加法，减法运算分别为

$$A + B = \begin{cases} [\min\{(a^- + b^+), (a^+ + b^-)\}; \\ \max\{(a^- + b^+), (a^+ + b^-)\}], A, B \text{ 取值互补}; \\ [a^- + b^-, a^+ + b^+], A, B \text{ 取值不互补}. \end{cases}$$

对于区间数互补判断矩阵中的元素，存在着一些取值相关的现象. 如 $A_{ij} = [a_{ij}^-, a_{ij}^+]$ 与其自身，因为同是描述方案 i 与 j 的重要程度之差，从而它们的取值应该一致的，即得到如下结论

$$A_{ij} - A_{ij} = \lambda a_{ij}^- + (1-\lambda) a_{ij}^+ - \lambda a_{ij}^- - (1-\lambda) a_{ij}^+ = 0.$$

由例 1，并利用定义 9 得

$$A_{ij} - A_{ij} = [0.2 - 0.2, 0.3 - 0.3] = 0.$$

同理对于 $A_{ij} = [a_{ij}^-, a_{ij}^+]$ 与 $A_{ji} = [a_{ji}^-, a_{ji}^+]$ 应该是取值互补的，即得到 $A_{ij} + A_{ji} = 1$ 的结论，例如

$$A_{ij} + A_{ji} = [0.2 + 0.8, 0.3 + 0.7] = 1.$$

在以下的运算中，对于取值相关的元素应该首先运算，对于其它元素的运算，由于没有此性质，可以应用定义 2.

4 排序算法

定理 1 若 $\hat{A} = (A_{ij})_{n\times n}$，$A_{ij} = [a_{ij}^-, a_{ij}^+]$ 为区间数互补判断矩阵，实行如下数学变换

$$\overline{A}_{ij} = \frac{a_i - a_j}{\alpha} + 0.5, \alpha \geqslant 2(n-1), a_i = \sum_{j=1}^{n} [a_{ij}^-, a_{ij}^+], i \in \mathbf{N}, \tag{1}$$

则矩阵 $\overline{A} = (\overline{A}_{ij})_{n\times n}$ 是一致性区间数互补判断矩阵.

证明 由于 $0 \leqslant a_{ij}^- \leqslant a_{ij}^+ \leqslant 1$ 则

$$a_i = \sum_{j=1}^{n} [a_{ij}^-, a_{ij}^+] \subset [0.5, n-0.5], a_i - a_j \subset [1-n, n-1],$$

从而

$$\overline{A}_{ij} \subseteq [0,1].$$

$$\overline{A}_{ij} + \overline{A}_{ji} = \left(\frac{a_i - a_j}{\alpha} + 0.5\right) + \left(\frac{a_j - a_i}{\alpha} + 0.5\right),$$

应用判断矩阵元素取值相关性知 $a_i - a_i = 0$，$a_j - a_j = 0$，从而 $\overline{A}_{ij} + \overline{A}_{ji} = 1$ 且易证 $\overline{A}_{ij} + \overline{A}_{jk} = \overline{A}_{ik} + 0.5$ 成立，则 $\overline{A}$ 是一致性区间数互补判断矩阵.

定理 2[2] 若 $\hat{A} = (A_{ij})_{n\times n}$，$A_{ij} = [a_{ij}^-, a_{ij}^+]$ 为一致性区间数互补判断矩阵，则通过公式 $B_{ij} = 9^{2A_{ij}-1}$ 转换，得到一致性区间数互反判断矩阵 $\hat{B} = (B_{ij})$，$B_{ij} = [b_{ij}^-, b_{ij}^+]$.

由于区间数互补和互反可以相互转换，因此我们可以应用文献[8]的算法，得到如下的区间数互补判断矩阵的排序算法.

步骤 1：对于一个区间数互补判断矩阵 $\hat{A} = (A_{ij})_{n\times n}$，$A_{ij} = [a_{ij}^-, a_{ij}^+]$，通过公式(1)将其转换为一致性区间数互补矩阵 $\hat{C} = (C_{ij})_{n\times n}$，$C_{ij} = [c_{ij}^-, c_{ij}^+]$，并进行步骤 2. 如果 $\hat{A} = (A_{ij})_{n\times n}$ 是完全一致的，则转步骤 3.

步骤 2：利用公式 $B_{ij} = 9^{2C_{ij}-1}$ 将一致性区间数互补判断矩阵转换为一致性区间数互反判断矩阵 $\hat{B} = (B_{ij})_{n\times n}$，$B_{ij} = [b_{ij}^-, b_{ij}^+]$.

步骤 3：令 $B_{ij}^- = (b_{ij}^-)_{n\times n}$，$B_{ij}^+ = (b_{ij}^+)_{n\times n}$，求 B_{ij}^-，B_{ij}^+ 的最大特征值所对应的具有正分量的归一化特征向量 x^-，x^+.

步骤 4：由 B_{ij}^-，B_{ij}^+ 计算

$$k = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} b_{ij}^+\right)^{-1}}, m = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} b_{ij}^-\right)^{-1}}.$$

步骤 5：权重区间 $\omega = [kx^-, mx^+]$.

5 结束语

本文针对现有区间数运算法则的一些不足，给出了一些更合理的定义和一个一致性区间数互补判断矩阵的定理，完善了其一致性理论. 基于以上两者，并依据互反和互补之间的转换，得到了一个区间数互补判断矩阵的排序算法. 此结论对进一步研究区间数互补判断矩阵的理论与应用有一定的参考价值.

参考文献：

[1] 韦兰用，韦振中. 区间数判断矩阵中区间数的运算[J]. 数学的实践与认识，2003，33(9)：75-79.

[2] 周礼刚，陈华友. 两类区间数判断矩阵的一致性研究[J]. 运筹与管理，2005，14(4)：47-51.

[3] 徐泽水. 区间数互补判断矩阵排序的一种实用方法[J]. 运筹与管理，2001，10(1)：16-19.

（下转第 25 页）

$\sum_{n=0}^{3m-2} 2q_n[N_{m-1}(2x-n) - N_{m-1}(2x-n-1)] = 2[\sum_{n=0}^{3m-2} q_n N_{m-1}(2x-n) - \sum_{n=0}^{3m-2} q_n N_{m-1}(2x-n-1)] = 2[\sum_{n=0}^{3m-2} q_n N_{m-1}(2x-n) - \sum_{k=1}^{3m-1} q_{k-1} N_{m-1}(2x-k)] = 2[q_0 N_{m-1}(2x) + \sum_{n=1}^{3m-2} q_n N_{m-1}(2x-n) - \sum_{k=1}^{3m-2} q_{k-1} N_{m-1}(2x-k) - q_{3m-2} N_{m-1}(2x-3m+1)] = 2q_0 N_{m-1}(2x) + 2\sum_{n=1}^{3m-2}(q_n - q_{n-1}) N_{m-1}(2x-n) - 2q_{3m-2} N_{m-1}(2x-3m+1)$.

性质 7 $\Psi_m(x) = \frac{1}{m-1}\{2xq_0 N_{m-1}(2x) + \sum_{n=1}^{3m-2}[q_n(2x-n) + q_{n-1}(m+n-1-2x)] N_{m-1}(2x-n) + q_{3m-2}(4m-2-2x) N_{m-1}(2x-3m+1)\}$. (7)

证明 由 B- 样条的性质 $N_m(x) = \frac{x}{m-1} N_{m-1}(x) + \frac{m-x}{m-1} N_{m-1}(x-1)$,有

$\Psi_m(x) = \sum_{n=0}^{3m-2} q_n[\frac{2x-n}{m-1} N_{m-1}(2x-n) + \frac{m-(2x-n)}{m-1} N_{m-1}(2x-n-1)] = \frac{1}{m-1}\sum_{n=0}^{3m-2} q_n(2x-n) N_{m-1}(2x-n) + (m+n-2x) N_{m-1}(2x-n-1)] = \frac{1}{m-1}[\sum_{n=0}^{3m-2} q_n(2x-n) N_{m-1}(2x-n) + \sum_{n=0}^{3m-2} q_n(m+n-2x) N_{m-1}(2x-n-1)] = \frac{1}{m-1}[\sum_{n=0}^{3m-2} q_n(2x-n) N_{m-1}(2x-n) + \sum_{k=1}^{3m-1} q_n(m+k-1-2x) N_{m-1}(2x-k)] = \frac{1}{m-1}[2xq_0 N_{m-1}(2x) + \sum_{n=1}^{3m-2} q_n(2x-n) N_{m-1}(2x-n) + \sum_{n=1}^{3m-2} q_{k-1}(m+k-1-2x) N_{m-1}(2x-k) + q_{3m-2}(4m-2-2x) N_{m-1}(2x-3m+1)] = \frac{1}{m-1}\{2xq_0 N_{m-1}(2x) + \sum_{n=1}^{3m-2}[q_n(2x-n) + q_{n-1}(m+n-1-2x)] N_{m-1}(2x-n) + q_{3m-2}(4m-2-2x) N_{m-1}(2x-3m+1)\}$.

参考文献:

[1] CHUI C K, WANG J Z. On compactly supported spline wavelet and a duality principle[J]. Trans Amert Math Soc, 1992, 330: 903-916.

[2] 金坚明,徐应祥,薛鹏翔. 最小支集样条小波有限元[J]. 计算数学, 2006, 28(1): 89-93.

[3] 崔锦泰(美). 小波分析导论[M]. 程正兴,译. 西安:西安交通大学出版社, 1995.

[4] 孙家昶. 样条函数与计算几何[M]. 北京:科学出版社, 1982.

(责任编辑:韦廷宗)

(上接第 22 页)

[4] 许先云,杨永清. 不确定 AHP 判断矩阵的一致性逼近与排序方法[J]. 系统工程理论与实践, 1998, 18(2): 19-22.

[5] 胡宝清. 模糊理论基础[M]. 武汉:武汉大学出版社, 2004.

[6] 吕跃进,王玉燕,覃柏英. 区间数的相容性间数互补判断矩阵的相容性研究[J]. 广西大学学报:自然科学版, 2004, 29(3): 179-182.

[7] 吴江,黄登仕. 多属性决策中区间数偏好信息的一致化方法[J]. 系统工程理论与实践, 2003, 12(4): 359-362.

[8] 魏毅强,刘进生,王绪柱. 不确定型 AHP 中判断矩阵的一致性概念及权重[J]. 系统工程理论与实践, 1994, 14(4): 16-22.

(责任编辑:凌汉恩 邓大玉)