广西科学院学报 2007,23(1):18～19
Journal of Guangxi Academy of Sciences Vol. 23, No. 1 February 2007

定数截尾情形下指数分布的可靠性 EB 估计

The EB Estimation of Exponential Distribution Reliability under the Type-Ⅱ Censoring Life Test

王再红,朱 宁,李建军

WANG Zai-hong, ZHU Ning, LI Jian-jun

(桂林电子科技大学计算科学与数学系,广西桂林 541004)

(Department of Computational Science and Mathematics, Guilin University of Electronic Technology, Guilin, Guangxi, 541004, China)

摘要:在有替换或无替换定数截尾试验下,推导出指数分布失效率为 λ 和可靠性函数的经验 Bayes 估计.

关键词:指数分布 失效率 可靠性 经验 Bayes 估计 定数截尾

中图法分类号:O212.8 **文献标识码**:A **文章编号**:1002-7378(2007)01-0018-02

Abstract: Under the type-Ⅱ censoring life test of two situations, the empirical estimation is derived of the failure rate λ and the reliability function in the exponential distribution. The presented method is simple and convenient.

Key words: exponential distributioin, failure rate, reliability, empirical estimation, type-Ⅱ censoring test

在可靠性统计分布分析中,寿命分布的类型与统计分析的方法有密切的关系,不同类型的寿命分布使用不同的方法来进行系统分析,文献[1]讨论了指数分布样条经验 Bayes 估计,文献[2]给出了平方损失下的 Bayes 估计,文献[3]给出了定时的参数估计.本文讨论的是定数截尾情形下替换或非替换的 Bayes 估计.

设系统的寿命 t 服从指数分布,即

$$f(t|\lambda)=\lambda e^{-\lambda t}(t\geqslant 0,\lambda>0).$$

利用 Bayes 定理,选择 Poisson 分布的共轭分布 Γ 作为先验分布,即

$$\pi(\lambda)=\frac{b^a\lambda^{a-1}}{\Gamma(a)}e^{-b\lambda}. \tag{1}$$

1 λ 的 Bayes 估计

引理 1[4] 设随机抽取 n 件样品,有替换定数截尾试验为 r 个失效,则 $(t_1,\cdots,t_r)$ 的联合条件密度为

$$f_1(t_1,\cdots,t_r|\lambda)=(\lambda n)^r e^{-\lambda S_1}(\lambda>0),\text{其中 } S_1=nt_r. \tag{2}$$

引理 2[4] 设随机抽取 n 件样品,无替换定数截尾试验 r 个失效,失效时间分别为 $t_1\leqslant t_2\leqslant\cdots\leqslant t_{r_1}$,则它们的联合条件密度为

$$f_2(t_1,\cdots,t_r|\lambda)=\frac{n!}{(n-r)!}\lambda^r e^{-\lambda S_2}(\lambda>0),\text{其中}$$
$$S_2=t_1+\cdots t_r+(n-r)t_n. \tag{3}$$

以上引理证明见文献[4].

定理 1 设总体服从指数分布,参数 λ 的先验分布为 Γ 分布,由引理 1 有

(Ⅰ)若损失函数为平方损失,则 λ 的 Bayes 估计为

$$\bar{\lambda}=\frac{r+a}{S_1+b}.$$

(Ⅱ)若取损失函数为 $L(\bar{\lambda}_1,\lambda)=\bar{\lambda}_1^2\lambda^l(\bar{\lambda}_1-\lambda)^2(-\infty<l<+\infty)$ 且假定 $r+l>0$,则 λ 的 Bayes 估计为

$$\bar{\lambda}_1=\frac{l+1+r+a}{S_1+b}.$$

证明 由(1)、(2)式可知,$(t_1,t_2,\cdots,t_r,\lambda)$ 的联合密度函数为

$$f_1(t_1,t_2,\cdots,t_r,\lambda)=\pi(\lambda)\cdot f_1(t_1,t_2,\cdots,t_r|\lambda)=\frac{b^a}{\Gamma(a)}n^r\lambda^{r+a-1}e^{-(S_1+b)\lambda}(\lambda>0), \tag{4}$$

收稿日期:2006-03-13
修回日期:2006-05-29
作者简介:王再红(1963-),男,讲师,主要从事多元统计分析研究。

因而$(t_1,t_2,\cdots,t_r)$的边际密度函数为

$$g_1(t_1,t_2,\cdots,t_r)=\int_0^{+\infty}f_1(t_1,t_2,\cdots,t_r,\lambda)\mathrm{d}\lambda=\frac{\Gamma(r+a)n^r b^a}{\Gamma(a)(S_1+b)^{r+a}}.$$

故λ的后验分布为

$$h_1(\lambda|t_1,t_2,\cdots,t_r)=\frac{f_1(t_1,t_2,\cdots,t_r,\lambda)}{g_1(t_1,t_2,\cdots,t_r)}=\frac{(S_1+b)^{r+a}}{\Gamma(r+a)}\lambda^{r+a-1}\mathrm{e}^{-(S_1+b)\lambda}(\lambda>0),\tag{5}$$

在平方损失下,λ的 Bayes 估计为

$$\bar{\lambda}_1=E(\lambda|t_1,t_2,\cdots,t_r)=\int_0^{+\infty}\lambda h_1(\lambda|t_1,t_2,\cdots,t_r)\mathrm{d}\lambda=\frac{(S_1+b)^{r+a}}{\Gamma(r+a)}\int_0^{+\infty}\lambda^{r+a}\mathrm{e}^{-(S_1+b)\lambda}\mathrm{d}\lambda=\frac{r+a}{S_1+b}.\tag{6}$$

若取损失函数$L(\bar{\lambda}_1,\lambda)=\bar{\lambda}_1^2\lambda^l(\bar{\lambda}_1-\lambda)^2$考虑

$$E(\lambda^l|t_1,t_2,\cdots,t_r)=\int_0^{+\infty}\lambda^l h_1(\lambda|t_1,t_2,\cdots,t_r)\mathrm{d}\lambda=\frac{(S_1+b)^{r+a}}{\Gamma(r+a)}\int_0^{+\infty}\lambda^{l+r+a-1}\mathrm{e}^{-(S_1+b)\lambda}\mathrm{d}\lambda=\frac{\Gamma(l+r+a)}{\Gamma(r+a)\cdot(S_1+b)^l},$$

由$L(\bar{\lambda}_1,\lambda)$的表达式可知,估计$\bar{\lambda}_1$的后验风险为

$$R(\bar{\lambda}_1)=E(\lambda^l)-2\frac{1}{\bar{\lambda}_1}E(\lambda^{l+1})+\frac{1}{\bar{\lambda}_1^2}E(\lambda^{l+2}),$$

令$\dfrac{\partial R(\bar{\lambda}_1)}{\partial\bar{\lambda}_1}=0$则有$\dfrac{2}{\bar{\lambda}_1^2}E(\lambda^{l+1})-\dfrac{2}{\bar{\lambda}_1^3}E(\lambda^{l+2})=0$,

因为$\bar{\lambda}_1>0$,故得

$$\bar{\lambda}_1=\frac{E(\lambda^{l+2})}{E(\lambda^{l+1})}=\frac{\Gamma(l+2+r+a)}{(S_1+b)\Gamma(l+1+r+a)}=\frac{l+1+r+a}{S_1+b}.\tag{7}$$

2 λ的可靠性经验 Bayes 估计

由(6)和(7)式可知,$\bar{\lambda}_1$只与失效数r和总试验时间S_1有关,而与每一失效产品具体失效时间$t_1,t_2,\cdots,t_r$的值无关.

设产品曾独立进行过N次有相同总试验次数T的有替换定数截尾试验,由文献[5],则可认为各批产品的失效率λ都独立服从先验分布Γ分布,其失效数r服从 Poisson 分布即

$$P(r|\lambda)=\frac{1}{r!}(\lambda T)^r\mathrm{e}^{-\lambda T}(r=0,1,2,\cdots).\tag{8}$$

由(1)和(8)式得随机变量r的边缘密度函数为

$$g(r)=\int_0^{+\infty}P(r|\lambda)\pi(\lambda)\mathrm{d}\lambda=\frac{b^a}{r!\Gamma(a)}\int_0^{+\infty}(\lambda T)^r\mathrm{e}^{-(T+b)\lambda}\lambda^{a-1}\mathrm{d}\lambda=\frac{\Gamma(r+a)}{r!\Gamma(a)}\cdot\frac{T^r b^a}{(T+b)^{r+a}}(r=0,1,2,\cdots),\tag{9}$$

在(9)式中,令$P=\dfrac{T}{T+b}$,显然$0<P<1$从而

$$g(r)=\frac{\Gamma(r+a)}{r!\Gamma(a)}\cdot P^r(1-P)^a(r=0,1,2,\cdots),\tag{10}$$

从(10)式可知,随机变量r服从负二次项分布,因此其均值$E(r)=\dfrac{aP}{1-P}$,方差$D(r)=\dfrac{aP}{(1-P)^2}$. 根据先验信息,设样本R的均值为$\bar{r}=\dfrac{1}{N}\sum\limits_{i=1}^N r_i$,样本方差为$S^2=\dfrac{1}{N-1}\sum\limits_{i=1}^N(r_i-\bar{r})^2$,由矩估计法,令

$$\begin{cases}\dfrac{aP}{1-P}=\bar{r},\\ \dfrac{aP}{(1-P)^2}=S^2,\end{cases}$$

可得$\hat{a}=\dfrac{\bar{r}^2}{(S^2-\bar{r})}$,$\hat{P}=1-\dfrac{\bar{r}}{S^2}$,由$P=\dfrac{T}{T+b}$得$\hat{b}=\dfrac{T\bar{r}}{S^2-\bar{r}}$,故$\lambda$的经验 Bayes 估计为$\bar{\lambda}_1^*=\dfrac{r+\hat{a}}{S_1+\hat{b}}$,从而产品的可靠度$\hat{R}(t_0)=\mathrm{e}^{-t_0\bar{\lambda}_1^*}$,其中$t_0$预先给定. 可靠寿命$t(R)$的估计量为$\hat{t}(R)=\bar{\lambda}_1^*\ln\dfrac{1}{R}$,其中可靠度为预先给定.

定理 2 设总体服从指数分布,参数λ的先验分布为Γ分布,由引理 2 有

(Ⅰ)若损失函数为平方损失,则参数λ的 Bayes 估计为$\bar{\lambda}_2=\dfrac{r+a}{S_2+b}$.

(Ⅱ)若取损失函数为$L(\bar{\lambda}_1,\lambda)=\bar{\lambda}_1^2\lambda^l(\bar{\lambda}_1-\lambda)^2(-\infty<l<+\infty)$且假定$r+l>0$,则参数$\lambda$的 Bayes 估计为$\bar{\lambda}_2=\dfrac{l+1+r+a}{S_2+b}$.

定理 2 的证明完全类似于定理 1. 同样参数的可靠性经验 Bayes 估计也类似上面.

参考文献:

[1] 李荣. 指数分布下可靠性参数的样条经验 Bayes 估计[J]. 国防科技大学学报,1999,21(6):114-118.

[2] 陈平. 指数场合下恒定应力加速寿命试验的贝叶斯估计[J]. 数理统计与应用概率,1988,16(3):353-359.

[3] 刘银萍,马占友. 定时截尾情形下二项分布参数的估计[J]. 东北师范大学学报,2004,36(4):25-28.

[4] 戴树森. 关于寿命试验的某些统计分析(Ⅰ)[J]. 数学的认识与实践,1982,2(3):50-59.

[5] 张尧庭. 贝叶斯统计推断[M]. 北京:科学出版社,1991.

(责任编辑:凌汉恩 邓大玉)