

改进格式的组合网格法 Improvement Form of Combination Grid Method

石武军¹, 马昌凤^{1,2}

SHI Wu-jun¹, MA Chang-feng^{1,2}

(1. 桂林电子科技大学数学与计算科学学院, 广西桂林 541004; 2. 福建师范大学数学与计算机科学学院, 福建福州 350007)

(1. School of Mathematics and Computing Science, Guilin University of Electronic Technology, Guilin, Guangxi, 541004, China; 2. School of Mathematics and Computer Science, Fujian Normal University, Fuzhou, Fujian, 350007, China)

摘要: 针对组合网格法在求解特殊类型的工程问题时求得数值解精度低的缺陷, 提出一个改进计算格式的组合网格法. 粗细两套网格都是在各自区域上单独剖分, 两套网格互不影响, 在粗网格上达到粗网格的精度, 在细网格上达到细网格的精度. 该方法的网格剖分为粗网格和细网格, 能够大大提高数值解的精确度.

关键词: 组合网格 网格划分 渗流 有限元

中图分类号: O175 文献标识码: A 文章编号: 1002-7378(2007)01-0011-02

Abstract: In solving special projection, combination grid method produces low precision numerical solution. This paper puts forward a new combination grid method which can improve computation form. This method has two sets of grids in the whole area, coarse grid, and fine grid. They are analyzed alone in the respective region, and do not affect each other. Numerical solution reaches its precision on coarse grid and its precision on fine grid. This method can improve numerical solution precision.

Key words: combination grid, meshing, seepage, finite element

有限元方法是一种迭代求解微分方程的数值方法. 在我国, 20 世纪 60 年代初期冯康^[1]就独立地建立了有限元方法的数学理论并将其应用于解决工程实际问题. 近年来, 随着计算机技术的普及和计算速度的不断提高, 有限元方法在工程设计和分析中得到了越来越广泛的重视, 已经成为解决复杂工程分析与计算问题的有效途径. 在大规模求解工程应用的科学计算中, 求得高精度的数值解和构造高效率求解离散方程的迭代方法一直是计算数学工作者和工程技术人员共同关心的问题. 比如数值求解问题:

这里 L_c, L_f 为椭圆微分算子, $\Omega = \Omega_c \cup \Omega_f$, 模型如图 1 所示.

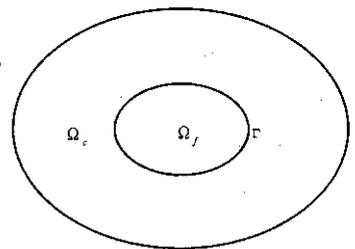


图 1 问题(1)的模型

记 $H^k(\Omega) = W^{k,2}$ 为 $L_2(\Omega)$ 可积的 k 阶可微的 Sobolev 空间, 其范数记为 $P \cdot P_k$, 当 $k = 0$ 时 k 省略, (\cdot, \cdot) 表示 $L_2(\Omega)$ 的内积^[2].

问题(1)的弱形式为

$$\begin{cases} (L_c v, \bar{v})_{\Omega_c} = (f, \bar{v})_{\Omega_c}; \\ (L_f u, \bar{u})_{\Omega_f} = (f, \bar{u})_{\Omega_f}, u|_r = v|_r, \\ \forall \bar{v}, \bar{u} \in H_0^1(\Omega). \end{cases} \quad (2)$$

最后问题(1)可化为: 在整体区域 Ω 上求解 $(u + v) \in U_h$, 满足

$$\begin{cases} L_c v = f, \Omega_c; \\ L_f u = f, \Omega_f, v|_r = u|_r, \frac{\partial v}{\partial n}|_r = \frac{\partial u}{\partial n}|_r; \\ v|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \quad (1)$$

$$K(u + v) = f,$$

其中 K 为总刚度矩阵, f 为总荷载向量.

使用传统有限元法求解问题(1)时,首先,由于在区域 Ω_c 和 Ω_f 上的椭圆微分算子 L_c, L_f 的不同,无法用统一的形式来形成单元刚度矩阵,因而合成总体刚度矩阵是非常困难的,难于计算机实现.其次,当 Ω_f 相对于 Ω_c 为非常小的区域时,为得到高质量的网格,在区域 Ω_f 上网格的加密必然使得全局区域 Ω 上网格的加密,因而计算工作量也随之增加.

针对在求解特殊类型的工程问题(比如间断系数类型)时,传统的有限元方法在求解精度和迭代步骤控制方面遇到的数值解精度低,迭代步骤多,计算时间长,不容易在计算机上编程实现等困难^[3],有人提出了改进的有限元方法即组合网格法^[4].目前组合网格法在求解此类问题的迭代步骤一般在两步左右就得到数值解并结束计算,迭代过程和计算机编程实现简单,但是,这样得到的数值解的精度是不够的.本文提出一种新的组合网格法的计算格式,能够大大提高数值解的精确度.

1 组合网格法的改进格式

在问题(1)中,对 Ω 和 Ω_f 分别进行网格剖分,得到粗网格 T_H 和细网格 T_h (T_h 比 T_H 网格尺寸小很多),并有相应的有限元空间 S_H 和 S_h , T_H 和 T_h 不一定是规则网格.组合网格算法格式如下:

$$\begin{cases} (L_c v, \bar{v})_{\Omega_c} + (L_c v, \bar{v})_{\Omega_f} = (f, \bar{v})_{\Omega} - \\ (L_f u, \bar{v})_{\Omega_f} + (L_c u, \bar{v})_{\Omega_f}; \\ (L_f u, \bar{u})_{\Omega_f} = (f, \bar{u})_{\Omega_f}, \quad u|_r = v|_r. \end{cases} \quad (3)$$

在区域 Ω_f 上,由于粗网格和细网格上的节点数不一样导致未知变量的个数也不一样多,因而需要求出 u 和 v 在其上的转换关系.

令细网格上的基函数为 $\{\Phi_j\}_{j=1}^{n_f}$,粗网格上的基函数为 $\{\Psi_j\}_{j=1}^{n_c}$,则有

$$\Psi = D\Phi,$$

其中 D 为 $n_c \times n_f$ 矩阵.于是, $\forall v \in S_H, u \in S_h$, 有

$$v = \sum_{i=1}^{n_c} v_i \varphi_i = V^T \Psi; \quad (4)$$

$$u = \sum_{i=1}^{n_f} u_i \phi_i = U^T \Phi, \quad (5)$$

其中 $V = (v_1, v_2, L, v_{n_c})^T, \Psi = (\varphi_1, \varphi_2, L, \varphi_{n_c})^T, U = (u_1, u_2, L, u_{n_f})^T, \Phi = (\phi_1, \phi_2, L, \phi_{n_f})^T$.

在 Ω_f 内,将式(3)分别代入式(4),(5)可得:

$$v = V^T D \Phi; \quad (6)$$

$$u = U^T D^{-1} \Psi. \quad (7)$$

在式(2)中有

$$(L_c v, \bar{v})_{\Omega_c} + (L_c v, \bar{v})_{\Omega_f} = (L_c v, \bar{v})_{\Omega} = (L_c V^T \Psi, \bar{v}^T \Psi)_{\Omega} = \bar{v}^T (L_c \Psi, \Psi)_{\Omega} V = \bar{v}^T A_c V; \quad (8)$$

$$\begin{aligned} (f, \bar{v})_{\Omega} - (L_f u, \bar{v})_{\Omega_f} + (L_c u, \bar{v})_{\Omega_f} &= \bar{V}^T (f, \Psi)_{\Omega} - \bar{V}^T (L_f u, \Psi)_{\Omega_f} + \bar{V}^T (L_c u, \Psi)_{\Omega_f} = \bar{V}^T (f, \Psi)_{\Omega} \\ &- \bar{V}^T (L_f U^T \Phi, D \Phi)_{\Omega_f} + \bar{V}^T (L_c (U^T \Phi), D \Phi)_{\Omega_f} = \\ &\bar{V}^T (f, \Psi)_{\Omega} - \bar{V}^T D (L_f \Phi, \Phi)_{\Omega_f} U + \bar{V}^T D (L_c \Phi, \Phi)_{\Omega_f} U \\ &= \bar{V}^T F_{\Omega} - \bar{V}^T D A_f U + \bar{V}^T D A_c^{\Omega_f} U, \end{aligned} \quad (9)$$

于是

$$A_c V = F_{\Omega} - D A_f U + D A_c^{\Omega_f} U = F_{\Omega} - D (A_f - A_c^{\Omega_f}) U,$$

其中

$$A_c = (L_c \Psi, \Psi)_{\Omega}, A_f = (L_f \Phi, \Phi)_{\Omega_f}, A_c^{\Omega_f} = (L_c \Phi, \Phi)_{\Omega_f}.$$

另外,对于式(2)的第2个式子有

$$(L_f u, \bar{u})_{\Omega_f} = (L_f U^T \phi, \bar{U}^T \phi)_{\Omega_f} = \bar{U}^T (L_f \phi, \phi)_{\Omega_f} U = \bar{U}^T A_f U;$$

$$(f, \bar{u})_{\Omega_f} = \bar{U}^T (f, \Phi)_{\Omega_f}.$$

有了上面的推导,就可得到组合网格算法的迭代步骤如下.

初始 $n = 0, u^0 = 0$, 误差为 ϵ ;

步骤 1: 求 $v^{n+1} \in S_H$, 满足

$$(L_c v^{n+1}, \bar{v})_{\Omega_c} + (L_c v^{n+1}, \bar{v})_{\Omega_f} = (f, \bar{v})_{\Omega} + ((L_c - L_f) u^n, \bar{v})_{\Omega_f}, \forall \bar{v} \in S_H;$$

步骤 2: 求 $u^{n+1} \in S_h$, 满足

$$\begin{cases} (L_c u^{n+1}, \bar{u})_{\Omega_f} = (f, \bar{u})_{\Omega_f}; \\ u^{n+1}|_r = v^{n+1}|_r \quad \forall \bar{u} \in S_h. \end{cases}$$

步骤 3: 当 $\|v^{n+1} - v^n\| < \epsilon$ 迭代结束, 否则 $n = n + 1$, 转步骤 1.

2 组合网格法求解二维渗流问题

在各向同性的规则长方体土层中有一竖直断层,在规则土层的左方压力水头为 15m,在规则土层的右方压力水头为 5m,土层的渗流系数是 5.0×10^{-7} m/s,断层的渗流系数是 4.7×10^{-13} m/s. 求土层的渗流压力分布.

该渗流问题可简化为二维问题,取其截面为研究对象,数学方程如下^[5].

$$\begin{cases} L_1 u = -k_1 \Delta u = f_1, (x, y) \in (a, b) \times (c, d) \setminus (a_1, b_1) \times (c_1, d_1) = \Omega_1; \\ L_2 u = -k_2 \Delta u = f_2, (x, y) \in (a_1, b_1) \times (c_1, d_1) = \Omega_2; \\ u|_{r_1} = 0, u|_{r_2} = 10. \end{cases}$$

$deg\{(\bar{\beta}_1 - \bar{a}\exp(y_1), \bar{\beta}_2\exp(y_3 - y_2) - \bar{s}, \bar{r}\exp(y_2 - y_3) - \bar{d}\exp(y_3))^T, \Omega \cap KerL, 0\} \neq 0$,

显然,引理 2 的条件(3) 满足. 则 $L_y = N_y$ 在 $DomL \cap \bar{\Omega}$ 中至少有一个 ω 周期解 $y^* = (y_1^*, y_2^*, y_3^*)^T$, 使 $x^* = \exp\{y_1^*\}, z_1^* = \exp\{y_2^*\}, z_2^* = \exp\{y_3^*\}$, 为系统(1) 的正周期解.

参考文献:

[1] WANG WENDI, CHEN LANSUN. A predator-prey system with stage-structured for predator [J]. Computers Math Applic, 1997, 33(8): 83-91.
 [2] CUI J, SONG X. Pemanence of predator-prey system with stage-structured [J]. Discrete and Continuous Dynamical Systems, 2004, 4B(3): 547-554.
 [3] 谭德君, 张树文. 一类具有阶段结构的自治捕食系统的持久生存[J]. 北华大学学报, 2002, 3(1): 7-9.

[4] 何朝晖, 崔景安. 具有阶段结构捕食系统的永久持续生存[J]. 南京大学学报, 2005, 28(1): 24-29.
 [5] 陈凤德, 陈晓星, 张惠英. 捕食者具有阶段结构 Holling II 类功能性反应的捕食模型正周期解的存在性以及全局吸引性[J]. 数学物理学报, 2006, 26A(1): 93-103.
 [6] 张正球, 王志成. 一个具有阶段结构的捕食者食饵系统的周期解[J]. 数学学报, 2005, 48(3): 541-548.
 [7] MAGNUSS K G. A stage-structured predator-prey system with cannibalism and competition [J]. World Scientific, 1997, 13(1): 195-200.
 [8] GAINES R E, MAWHIN J L. Coincidence degree and nonlinear differential equations [M]. Berlin: Springer-Verlag, 1977.

(责任编辑: 凌汉恩 邓大玉)

(上接第 12 页)

其中 L_1, L_2 为算子, k_1, k_2 为常量, Γ_1 表示区域的左边, Γ_2 表示区域的右边, f_1, f_2 为表达式常量. 整体区域 $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$.

图 2, 3 分析比较表明, 采用组合网格法得到了符合精度要求的数值解.



图 2 Galerkin 方法得到的计算结果

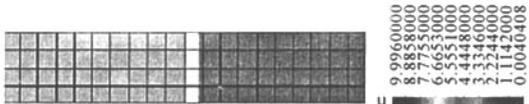


图 3 组合网格法得到的计算结果

3 结束语

与 Galerkin 法相比, 本文提出的组合网格法方便在计算机上编程实现的; 另外一个突出的优点就是粗细两套网格都是在各自区域上单独剖分, 两套网格互不影响, 在粗网格上达到了粗网格的精度, 在细网格上达到细网格的精度. 该方法不仅适合于不同的椭圆微分算子 L_c, L_f , 而且当椭圆微分算子

L_c 和 L_f 相同时, 迭代法一步收敛.

参考文献:

[1] 冯康. 基于变分原理的差分格式[J]. 应用数学与计算数学, 1965, 2(4): 238-262.
 [2] 徐长发, 李红. 实用偏微分方程数值解法[M]. 武汉: 华中科技大学出版社, 2000.
 [3] DANIEL S PIPKINSAY, SATYA N ATLURIB. Applications of the three dimensional method finite element alternating method [J]. Finite Elements in Analysis and Design, 1996, 23: 133-153.
 [4] THEOFANIS STROUBOULIS, LIN ZHANG, IVO BABUSKA. Generalized finite element method using mesh-based handbooks: application to problems in domains with many voids [J]. Comput Methods Appl Mech Engrg, 2003, 192(28): 3109-3161.
 [5] 章本照, 印建安, 张宏基. 流体力学数值方法[M]. 北京: 机械工业出版社, 2003.

(责任编辑: 凌汉恩 邓大玉)