算子凸序列不等式
Operator Inequality for Convex Sequences

吴树宏
WU Shu-hong

(武汉理工大学理学院数学系,湖北武汉 430070)
(Department of Mathematics, School of Science, Wuhan University of Technology, Wuhan, Hubei, 430070, China)

摘要:利用控制不等式理论证明一类算子凸序列不等式,把凸序列不等式推广到算子.
关键词:凸序列 不等式 算子
中图法分类号:O178 **文献标识码**:A **文章编号**:1002-7378(2007)01-0001-03
Abstract: In this paper we prove a class of operator convex sequences inequality by means of the theory of majorization. It is an operator generalization to convex sequences inequality.
Key words: convex sequence, inequality, operator

1 预备知识

设 H 是复 Hilbert 空间,$B(H)$ 是 H 上有界线性算子集,I 表示 H 上的恒等算子. 设 $T,S\in B(H)$,若 $\forall\ x\in H$,$\langle Tx,x\rangle\geqslant 0$($\langle Tx,x\rangle>0$,若 $x\neq 0$),则称 $T\geqslant 0(T>0)$. 若 $T-S\geqslant 0(T-S>0)$,则称 $T\geqslant S(T>S)$. 若 $m<n$,记 $\{m,m+1,\cdots,n\}=[m,n]$. $U^n(H)=\{(T_1,T_2,\cdots,T_n):T_1,T_2,\cdots,T_n\in B(H),T_{\sigma(1)}\geqslant T_{\sigma(2)}\geqslant\cdots T_{\sigma(n)}$,其中 σ 为 $\{1,2,\cdots,n\}$ 到自身的一一映射$\}$.

引理 1.1[1] 设两两可换的自伴算子 $A_i\in B(H)(i=1,2,\cdots,n)$,$\exists\ m_i,M_i(i=1,2,\cdots,n)$ 满足 $m_iI\leqslant A_i\leqslant M_iI$. 用 C_0 表示 $\prod\limits_{i=1}^{n}[m_i,M_i]$ 上所有连续函数全体组成的类. 若 $F(t_1,t_2,\cdots,t_n)\in C_0$ 且有 $F(t_1,t_2,\cdots,t_n)\geqslant 0,(t_1,t_2,\cdots,t_n)\in\prod\limits_{i=1}^{n}[m_i,M_i]$,则 $F(A_1,A_2,\cdots,A_n)\geqslant 0$.

引理 1.2[1] 如果 $f(t)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的实值单调增加的连续函数且 A,B 是 Hilbert 空间 H 上两个可交换的有界自伴线性算子,$A\leqslant B$,则 $f(A)\leqslant f(B)$.

定义 1.1 如果 $B(H)$ 中两两可换的自伴算子序列 $\{A_n\}$ 满足条件 $A_{i-1}+A_{i+1}\geqslant 2A_i(i\geqslant 2)$,则称 $\{A_n\}$ 是一个凸算子序列.

定义 1.2 设 $A,B\in U^n(H)$,$A=(A_1,A_2,\cdots,A_n)$,$B=(B_1,B_2,\cdots,B_n)$,将 A 与 B 的分量的递减重排,并分别记为 $A_{[1]}\geqslant A_{[2]}\geqslant\cdots\geqslant A_{[n]}$ 与 $B_{[1]}\geqslant B_{[2]}\geqslant\cdots\geqslant B_{[n]}$,若满足(i) $\sum\limits_{i=1}^{k}A_{[i]}\leqslant\sum\limits_{i=1}^{k}B_{[i]}(k=1,2,\cdots,n-1)$;(ii) $\sum\limits_{i=1}^{n}A_{[i]}=\sum\limits_{i=1}^{n}B_{[i]}$,则称 A 被 B 所控制,记作 $A\prec B$.

按照定义 1.1 与 1.2,通常的凸序列和控制概念是对 $H=C$ 情形提出的. 对这种情形,文献[2,3]对 $H=C$ 情形讨论了凸序列及凸序列不等式,本文将文献[3]的结论推广到算子情形.

2 几个引理

引理 2.1 自伴算子序列 $\{A_n\}$ 是凸算子序列的充要条件为:对任意 $p,q\in\{(x_1,x_2,\cdots,x_n):x_i\in\mathbf{Z}^+(i=1,2,\cdots,n.n\geqslant 2)\}$,若 $p=(p_1,p_2,\cdots,p_n)\prec(q_1,q_2,\cdots,q_n)=q$,则恒有 $A_{p_1}+A_{p_2}+\cdots+A_{p_n}\leqslant A_{q_1}+A_{q_2}+\cdots+A_{q_n}$.

证明 必要性. 对 n 用数学归纳法. 当 $n=2$ 时,只需证明 $A_1+A_q\geqslant A_2+A_{q-1}$. 其余情形递推即可得. 因

收稿日期:2006-03-20
作者简介:吴树宏(1963-),男,副教授,主要从事泛函分析工作。

$$A_{p-k}+A_{p+k}\geqslant 2A_p,(p-k,p+k\in[1,q]),$$

故

$$\sum_{p=1}^{q}([\frac{q-p}{2}]+[\frac{p-1}{2}])A_p=$$

$$\sum_{p-k,p+k\in[1,q]}(A_{p-k}+A_{p+k})\geqslant 2\sum_{p-k,p+k\in[1,q]}A_k=$$

$$2\sum_{p=1}^{q}\min\{p-1,q-p\}A_p. \tag{1}$$

若 $q=2r$，(1) 式即为

$$(r-1)\sum_{p=1}^{2r}A_p-2\sum_{p=1}^{2r}\min\{p-1,2r-p\}A_p\geqslant 0. \tag{2}$$

当 $r=2$ 时可由(2) 式推出 $A_1+A_4\geqslant A_2+A_3$. 当 $r\geqslant 3$ 时，进行递推运算：(i) 将不等式 $A_{r-2}+A_r-2A_{r-1}\geqslant 0$，$A_{r+3}+A_{r+1}-2A_{r+2}\geqslant 0$ 同乘以 $r-1$ 并与(2) 式相加得新不等式$(1)'$；(ii) 若已得新不等式$(s)'$，$1\leqslant s<r-2$，设此不等式中 A_{r-s}，A_{r+1+s} 的系数为 $-l_s$. 将不等式 $A_{r-s}+A_{r-s-2}-2A_{r-s-1}\geqslant 0$，$A_{r+1+s}+A_{r+3+s}-2A_{r+2+s}\geqslant 0$ 同乘以 l_s 并与不等式$(s)'$ 相加得新不等式$(s+1)'$；(iii) 若 $s=r-2$，停止. 由归纳可证 $l_s>0(1\leqslant s<r-2)$. 因上述诸不等式的系数和为 0，上法得到的最后一个不等式$(r-2)'$ 只含 A_1,A_2,A_{2r-1},A_{2r}，其中 A_1,A_{2r} 的系数相等且为正，A_2,A_{2r-1} 的系数相等，A_1,A_2,A_{2r-1},A_{2r} 的系数和为 0. 故不等式$(r-2)'$ 必可化为 $A_1+A_{2r}\geqslant A_2+A_{2r-1}$. 完全类似地，对 $q=2r+1$ 情形亦可证明 $A_1+A_{2r+1}\geqslant A_2+A_{2r}$. 故 $n=2$ 时命题成立.

假定当 $n=m(m\geqslant 2)$ 时命题成立. 考察 $n=m+1$ 的情形. 设 $p,q\in[1,m+1]$，$p=(p_1,\cdots,p_{m+1})\prec(q_1,\cdots,q_{m+1})=q$，不妨设 $p_1\geqslant p_2\geqslant\cdots\geqslant p_{m+1}$，$q_1\geqslant q_2\geqslant\cdots\geqslant q_{m+1}$. 下面分 2 种情形证明. 第 1 种情形：存在 $r\in[1,m+1]$，使得 $p_r=q_r$，去掉 p_r，q_r，显然仍有

$$(p_1,\cdots,p_{r-1},p_{r+1},\cdots,p_{m+1})\prec(q_1,\cdots,q_{r-1},q_{r+1},\cdots,q_{m+1}).$$

由归纳假设有

$$A_{q_1}+\cdots+A_{q_{r-1}}+A_{q_{r+1}}+\cdots+A_{q_{m+1}}\geqslant A_{p_1}+\cdots+A_{p_{r-1}}+A_{p_{r+1}}+\cdots+A_{p_{m+1}},$$

两边同加 A_{p_r}，则

$$A_{q_1}+\cdots+A_{q_{m+1}}\geqslant A_{p_1}+\cdots+A_{p_{m+1}}.$$

第 2 种情形：若 $p_i\neq q_i$，$i\in[1,m+1]$. 因 $p\prec q$，故 $p_1<q_1$ 且不可能对一切 $i\in[1,m+1]$，$p_i<q_i$. 故必存在 $r\in[2,m+1]$，使得 $p_r>q_r$. 不妨设这个 r 是使 $p_r>q_r$ 的最小下标，于是 $p_1<q_1$，$p_2<q_2$，$\cdots$，$p_{r-1}<q_{r-1}$，$p_r>q_r$. 记

$$h=\min\{q_{r-1}-p_{r-1},p_r-q_r\},q'_{r-1}=q_{r-1}-h,q'_r=q_r+h.$$

则 $h>0$ 且

$$q'_{r-1}\geqslant p_{r-1},q'_r\leqslant p_r \tag{3}$$

并且这两个不等式中至少有一个等式成立(当 $h=q_{r-1}-p_{r-1}$ 时，$q'_{r-1}=q_{r-1}-h=p_{r-1}$，当 $h=p_r-q_r$ 时，$q'_r=q_r+h=p_r$)，又因 $p_{r-1}\geqslant p_r$，由(3) 式有 $q'_{r-1}\geqslant q'_r$，于是 $q_{r-1}>q'_{r-1}\geqslant q'_r>q_r$ 且 $q'_{r-1}+q'_r=q_{r-1}+q_r$. 由前面对 $n=2$ 情形所证明的结论，有

$$A_{q'_{r-1}}+A_{q'_r}\leqslant A_{q_{r-1}}+A_{q_r}. \tag{4}$$

规定当 $i\neq r-1,r$ 时，$q'_i=q_i$，在(4) 式两边再加上 $\sum_{i\neq r-1,r}A_{q_i}$，得

$$\sum_{i=1}^{m+1}A_{q'_i}\leqslant\sum_{i=1}^{m+1}A_{q_i}. \tag{5}$$

再考察$(q'_1,\cdots,q'_{m+1})$ 和$(p_1,\cdots,p_{m+1})$. 由 $q'_{r-2}=q_{r-2}\geqslant q_{r-1}>q'_{r-1}\geqslant q'_r>q_r\geqslant q_{r+1}=q'_{r+1}$ 知$(q'_1,\cdots,q'_n)=(q'_{[1]},\cdots,q'_{[n]})$. 容易验证$(p_1,\cdots,p_n)\prec(q'_1,\cdots,q'_n)$. 前面已证明(3) 式的两个不等式中至少有一个等式成立，即$(p_1,\cdots,p_n)$ 与$(q'_1,\cdots,q'_n)$ 至少有一对同下标的分量相等，由已证明的第 1 种情形，

$$\sum_{i=1}^{m+1}A_{p_i}\leqslant\sum_{i=1}^{m+1}A_{q'_i}.$$

结合(5) 式得

$$\sum_{i=1}^{m+1}A_{p_i}\leqslant\sum_{i=1}^{m+1}A_{q_i}.$$

总结以上 2 种情形，由归纳假设，当 $n=m+1$ 时命题正确，从而对一切 $m\geqslant 2$ 命题正确.

充分性. 对任意正整数 i，于命题中取 $q_1=i-1$，$q_2=i+1$，$q_3=\cdots$，$q_n=0$，$p_1=p_2=i$，$p_3=\cdots=p_n=0$，则$(p_1,\cdots,p_n)\prec(q_1,\cdots,q_n)$ 且(2) 式化为 $A_{i-1}+A_{i+1}\geqslant 2A_i(i\in\mathbf{N})$，故$\{A_n\}$ 是一凸算子数列.

引理 2.2 设$\{A_n\}$ 是一个凸算子序列，$\forall\ n\in\mathbf{N}$，$\exists\ l,u\in\mathbf{R}$ 满足 $lI\leqslant A_n\leqslant uI$，$\phi$ 是$[l,u]$ 上增的凸函数，则$\{\phi(A_n)\}$ 也是凸算子序列.

证明 $\forall\ n\in\mathbf{N}$，因 ϕ 是$[l,u]$ 上的凸函数，由文献[4] 可知 ϕ 为$[l,u]$ 上的连续函数. 再由引理 1.1，必有

$$\phi(A_n)+\phi(A_{n+2})\geqslant 2\phi(\frac{A_n+A_{n+2}}{2}). \tag{6}$$

因$\{A_n\}$ 是一个凸算子序列，故

$$A_{n+1} \leqslant \frac{A_n + A_{n+2}}{2}.$$

又 $\phi(x)$ 在 $[l,u]$ 上增,由引理 1.2,

$$\phi(A_{n+1}) \leqslant \phi(\frac{A_n + A_{n+2}}{2}). \tag{7}$$

综合(6),(7)式,有 $\phi(A_{n+2}) + \phi(A_n) \geqslant 2\phi(A_{n+1})$. 由泛函分析结论[5]易知,$\{\phi(A_n)\}$ 为两两可换的自伴算子序列. 故 $\{\phi(A_n)\}$ 也是凸算子序列.

引理 2.3 若 $\{A_n\}$ 是一个凸算子序列,$S_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} A_i$,则 $\{S_n\}$ 也是一个凸算子序列.

证明 用数学归纳法可证

$$\sum_{i=2}^{n} i(i-1)[A_{i+1} - 2A_i + A_{i-1}] = n(n-1)A_{n+1} - (n+2)(n-1)A_n + 2\sum_{i=1}^{n} A_i.$$

因 $\{A_i\}$ 为凸算子序列,故

$$S_{n+1} - 2S_n + S_{n-1} = \frac{1}{n(n^2-1)}[n(n-1)A_{n+1} - (n+2)(n-1)A_n + 2\sum_{i=1}^{n-1} A_i] \geqslant 0.$$

显然 $\{S_n\}$ 为两两可换的自伴算子序列,故 $\{S_n\}$ 也是一个凸算子序列.

引理 2.4 设 $X,Y \in U^n(H)$,$X_1 \geqslant X_2 \geqslant \cdots \geqslant X_n$,$\sum_{i=1}^{n} X_i = \sum_{i=1}^{n} Y_i$,若存在 $k(1 \leqslant k \leqslant n)$ 使得 $X_i \leqslant Y_i(i = 1,2,\cdots,k)$;$X_i \geqslant Y_i(i = k+1,k+2,\cdots n)$,则 $X \prec Y$.

证明 显然 $\sum_{i=1}^{j} X_i \leqslant \sum_{i=1}^{j} Y_i, j \leqslant k$;同时 $\sum_{i=j}^{n} X_i \geqslant \sum_{i=j}^{n} Y_i, j = k+1,\cdots,n$. 但因 $\sum_{i=1}^{n} X_i = \sum_{i=1}^{n} Y_i$,故由最后 $n-k$ 个不等式可得 $\sum_{i=1}^{j-1} X_i \leqslant \sum_{i=1}^{j-1} Y_i, j = k+1,\cdots,n$. 再结合假设 $X_1 \geqslant \cdots \geqslant X_n$,便证明了 $X \prec Y$.

引理 2.5[3] $(\underbrace{2,\cdots,2}_{n+1},\cdots,\underbrace{2n,\cdots,2n}_{n+1}) \prec (\underbrace{1,\cdots,1}_{n},\cdots,\underbrace{2n+1,\cdots,2n+1}_{n})$.

3 主要结论

完全仿照文献[3]的证明,有

定理 3.1 设 $\{A_n\}$ 是一个凸算子序列,m,k 为非负整数,则

$$(n-2m)(A_{k+1} + A_{k+3} + \cdots + A_{k+2n+1}) + (2m-n-1)(A_{k+2} + A_{k+4} + \cdots + A_{k+2n}) + 2m(A_{k+1} + A_{k+2n+1}) - m(A_{k+2} + A_{k+2n}) \geqslant 0.$$

定理 3.2 设 $\{A_n\}$ 是一个凸算子序列,$h,m,n \in \mathbf{N}$,则

$$\frac{1}{n-2m}\sum_{k=m+1}^{n-m} A_k \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} A_k \leqslant \frac{1}{2m}(\sum_{k=1}^{m} A_k + \sum_{k=n-m+1}^{n} A_k)(n > 2m);$$

$$\frac{n-m}{h}\sum_{k=1}^{h} A_k + \frac{h-n}{m}\sum_{k=1}^{m} A_k + \frac{m-h}{n}\sum_{k=1}^{n} A_k \geqslant 0(h < m < n);$$

$$\frac{n+m}{n-m}(\sum_{k=1}^{n} A_k - \sum_{k=1}^{m} A_k) \leqslant \sum_{k=1}^{n+m} A_k(m \neq n).$$

定理 3.3 若 $\{A_n\}$ 是凸算子序列,$n \in \mathbf{N}$,$n > 1$,则

$$\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n-1} A_k \leqslant \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} A_k \leqslant \frac{1}{2}(A_0 + A_n).$$

参考文献:

[1] 李国平,蹇明. 算子函数论[M]. 武汉:武汉大学出版社,1996:234-235.

[2] 石焕南,李大矛. 凸数列的一个等价条件及其应用[J]. 曲阜师范大学学报:自然科学版,2001,27(4):4-6.

[3] 吴善和,石焕南. 凸序列不等式的控制证明[J]. 数学的实践与认识,2003,33(12):132-137.

[4] ROCKAFELLAR R T. Convex analysis[M]. Princeton:Princeton University Press,1972.

[5] 张恭庆,郭懋正. 泛函分析讲义:下[M]. 北京:北京大学出版社,1990.

(责任编辑:凌汉恩 邓大玉)