广西科学院学报 2006,22(3):153～156
Journal of Guangxi Academy of Sciences Vol. 22,No. 3 August 2006

一种新的样条小波的构造
Construction of a New Spline Wavelet

杨美香,丁宣浩
YANG Mei-xiang DING Xuan-hao

(桂林电子工业学院计算科学与数学系,广西桂林 541004)
(Department of Computational Science and Mathematics, Guilin Institute of Electronic Technology,Guilin,Guangxi,541004,China)

摘要:基于 Mallat 的多分辨分析理论,利用小波的传递函数构造法,构造出一种新的任意阶 B 样条小波.新构造出的样条小波表达式简单,且两尺度序列及其对偶很容易求得.该方法易于对信号进行小波分解与重构.
关键词:样条小波 尺度函数 传递函数 对偶
中图法分类号:O174.2 **文献标识码**:A **文章编号**:1002-7378(2006)03-0153-04
Abstract: Based on Mallat's multi-resolution analysis, the arbitrary order B-spline wavelet is constructed by using the method of construction of wavelet from their transfer functions. The B-spline wavelets have simple expressions and the two-scale sequences and their dual are easily obtained. The decomposition and reconstruction algorithms of signals are easily realized using the present method.
Key words: spline wavelet, scaling function, transfer function, dual

小波基的构造是小波分析的一个重要的研究方向,小波母函数的数量和种类有很多,在小波的应用中人们常常根据所处理的信号特征来构造或者选取最佳的小波基函数.因此,小波的构造无论对于理论分析还是应用研究都具有重要的意义,而样条小波是一种常用的具有显示表达式的小波基函数,利用多分辨分析构造出的样条小波,其表达式较为繁杂,文献[1]从小波与尺度函数的传递函数出发,给出了构造小波母函数及尺度函数的方法,并以此为起点,取小波与尺度函数的传递函数分别为 $G(\omega)=-e^{-i\omega}\sin^2\frac{\omega}{2}$,$H(\omega)=e^{-i\omega}\cos^4\frac{\omega}{2}$,构造了一个非正交小波,进一步推广得到了一类非正交的小波.本文基于小波的传递函数构造法构造出的一类非正交的样条小波及其对偶,这种构造方法简单,而且用此方法可根据具体问题的需要构造出性质更好的非正交的样条小波.

1 小波函数、尺度函数及其传递函数的关系

设小波 $\psi(x)$ 的尺度函数为 $\phi(x)$,其两尺度序列为 $\{p_n: n\in z\}$,则尺度函数的传递函数是 $H(\omega)=\frac{1}{2}\sum_{n\in z}p_n e^{-in\omega}$,两尺度符号为 $p(z)=\frac{1}{2}\sum_n p_n z^n$,其中 $z=e^{-i\frac{\omega}{2}}$;设小波 $\psi(x)$ 的两尺度序列为 $\{q_n: n\in z\}$,则小波函数的传递函数是 $G(\omega)=\frac{1}{2}\sum_{n\in z}q_n e^{-in\omega}$,两尺度符号为 $q(z)=\frac{1}{2}\sum_n q_n z^n$,其中 $z=e^{-i\frac{\omega}{2}}$;它们满足两尺度方程:

$$\begin{cases}\hat{\phi}(2\omega)=H(\omega)\hat{\phi}(\omega)\\ \hat{\psi}(2\omega)=G(\omega)\hat{\phi}(\omega)\end{cases} \text{或} \begin{cases}\hat{\phi}(\omega)=p(z)\hat{\phi}(\frac{\omega}{2})\\ \hat{\psi}(\omega)=q(z)\hat{\phi}(\frac{\omega}{2})\end{cases}, \tag{1}$$

和 $$\begin{cases}\phi(x)=\sum_n p_n\phi(2x-n)\\ \psi(x)=\sum_n q_n\phi(2x-n)\end{cases}, \tag{2}$$

矩阵 $M(z)=\begin{vmatrix}p(z) & p(-z)\\ q(z) & q(-z)\end{vmatrix}$ 为两尺度矩阵.

定理 1.1[2] 给定序列 $\{p_n: n\in z\}$,$\{q_n: n\in z\}$,则 $\{\phi(x-n),\psi(x-n): n\in z\}$ 是 V_1 的一个 Riesz 基如且仅如对于所有的 $|z|=1$,两尺度矩阵 $M(z)$ 是可逆的,即 $\det M(z)\neq 0$.

收稿日期:2005-11-21
作者简介:杨美香(1973-),女,广西桂林人,硕士研究生,主要从事小波分析及其应用研究。

2 一种新的样条小波的构造

2.1 一种新的样条小波构造法

令 $\phi_m(x) = \phi_{m-1}(x) * \phi_1(x)$，其中 $\phi_1(x)$ 是区间 $[0,1]$ 上的特征函数，$\phi_m(x)$ 为 m 阶的 B 样条，其支集为 $[0,m]$，$\phi_m(x)$ 可以作为一个尺度函数而生成一个多分辨分析[2]，当 $m \geqslant 2$ 时，由于 $\sum_{k\in z}|\hat{\phi}_m(\omega + 2k\pi)|^2 \not\equiv 1$，故 $m \geqslant 2$ 时，$\phi_m(x)$ 不再是正交尺度函数，此时若要由 $\phi_m(x)$ 去构造正交样条小波，首先将 $\phi_m(x)$ 正交化. 在此过程中求傅立叶逆变换较繁琐，而在工程应用中，非正交小波应用于电力系统故障暂态信号分析，已取得了较好的效果[1]. 因此研究非正交小波的构造无疑是有意义的. 而以样条函数 $\phi_m(x)$ 为尺度函数构造小波，由定理 1.1 可知，只需构造序列 $\{q_n : n \in z\}$，使得对于任意的 $|z| = 1$，$M(z) = \begin{vmatrix} p(z) & p(-z) \\ q(z) & q(-z) \end{vmatrix} \neq 0$，从而得到构造样条小波的步骤如下：

(1) 以样条函数 $\phi(x)$ 为尺度函数，由两尺度方程 $\hat{\phi}(2\omega) = H(\omega)\hat{\phi}(\omega)$，得到尺度函数的传递函数 $H(\omega)$，直接展开 $H(\omega)$，得到两尺度序列 $\{p_n : n \in z\}$；

(2) 构造小波传递函数 $G(\omega)$，直接展开 $G(\omega)$，求出序列 $\{q_n : n \in z\}$，使得两尺度符号 $q(z)$ 满足对于任意的 $|z| = 1$，$\det M(z) = \begin{vmatrix} p(z) & p(-z) \\ q(z) & q(-z) \end{vmatrix} \neq 0$；

(3) 由两尺度序列 $\{q_n : n \in z\}$ 和小波方程 $\hat{\psi}(\omega) = G(\frac{\omega}{2})\hat{\phi}(\frac{\omega}{2})$ 可求得小波 $\hat{\psi}(\omega)$，通过取傅立叶逆变换就可得出小波 $\psi(x)$.

2.2 两个简单样条小波的构造

由 2.1 节中构造小波的步骤我们以样条函数 $\phi_m(x)(m \geqslant 2)$ 为尺度函数来构造样条小波.

(1) 取尺度函数 $\phi_2(x)$ 为二阶 B 样条，即

$$\phi_2(x) = \begin{cases} x, & 0 \leqslant x < 1, \\ 2 - x, & 1 \leqslant x < 2, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

则由 $\hat{\phi}_2(\omega) = \left[\dfrac{\sin\frac{\omega}{2}}{\frac{\omega}{2}}\right]^2 (e^{-i\frac{\omega}{2}})^2$ 及 $H_2(\frac{\omega}{2}) = \dfrac{\hat{\phi}(\omega)}{\hat{\phi}(\frac{\omega}{2})} = (\cos\frac{\omega}{4})^2 (e^{-i\frac{\omega}{4}})^2 = (\dfrac{e^{-i\frac{\omega}{4}} + e^{i\frac{\omega}{4}}}{2})^2 (e^{-i\frac{\omega}{4}})^2$ 知，尺度函数的传递函数为：$H_2(\omega) = (e^{-i\frac{\omega}{2}}\cos\frac{\omega}{2})^2 = (\dfrac{1 + e^{-i\omega}}{2})^2$，两尺度符号 $p_2(z) = (\dfrac{1+z}{2})^2$；取小波传递函数为 $G_2(\omega) = -ie^{-i\frac{\omega}{2}}\sin\frac{\omega}{2} = -\dfrac{1 - e^{-i\omega}}{2}$，则 $q_2(z) = (\dfrac{-1+z}{2})$ 且当 $|z| = 1$ 时，有 $\det M(z) = \begin{vmatrix} \frac{1}{2^2}(1+z)^2 & \frac{1}{2^2}(1-z)^2 \\ -\frac{1}{2}(1-z) & -\frac{1}{2}(1+z) \end{vmatrix} = -\dfrac{z}{2^2}(z^2 + 3) \neq 0$，故两尺度序列 $\{q_n\} = (q_0, q_1\} = \{-1, 1\}$ 可以用来构造小波，于是 $\hat{\psi}(\omega) = G(\frac{\omega}{2})\hat{\phi}(\frac{\omega}{2}) = -\frac{1}{4}(i\omega)e^{-i\frac{3\omega}{4}}[\dfrac{\sin\frac{\omega}{4}}{\frac{\omega}{4}}]^3$，两边取傅立叶逆变换得：$\psi(x) = -\frac{1}{4}\frac{d}{dx}b * b * b(x - \frac{3}{4})$，其中 $\hat{b}(\omega) = \dfrac{\sin\frac{\omega}{4}}{\frac{\omega}{4}}$，经计算得相应的小波函数为

$$\psi_2(x) = \begin{cases} -2x, & -\frac{3}{4} \leqslant x < -\frac{1}{4}, \\ 3 - 4x, & -\frac{1}{4} \leqslant x < \frac{1}{4}, \\ 3 - 2x, & \frac{1}{4} \leqslant x < \frac{3}{4}, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

(2) 取尺度函数 $\phi_3(x)$ 为三阶 B 样条，即

$$\phi_3(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2}, & 0 \leqslant x < 1, \\ \frac{3}{4} - (x - \frac{3}{2})^2, & 1 \leqslant x < 2, \\ \frac{1}{2}(x-3)^2, & 2 \leqslant x < 3, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

则由 $\hat{\phi}_2(\omega) = \left[\dfrac{sin\frac{\omega}{2}}{\frac{\omega}{2}}\right]^3 (e^{-i\frac{\omega}{2}})^3$ 及 $H_3(\frac{\omega}{2}) = \dfrac{\hat{\phi}_3(\omega)}{\hat{\phi}_3(\frac{\omega}{2})}$ 得尺度函数的传递函数为：$H_3(\omega) = (e^{-i\frac{\omega}{2}}\cos\frac{\omega}{2})^3 = (\dfrac{1 + e^{-i\omega}}{2})^3$ 且 $p_3(z) = (\dfrac{1+z}{2})^3$，取小波传递函数 $G_3(\omega) = -(ie^{-i\frac{\omega}{2}}\sin\frac{\omega}{2})^2 = -(\dfrac{1 - e^{-i\omega}}{2})^2$，则 $q_3(z) = -(\dfrac{1-z}{2})^2$ 且当 $|z| = 1$ 时，$\det M(z) = \begin{vmatrix} (\frac{1+z}{2})^3 & (\frac{1-z}{2})^3 \\ -(\frac{1-z}{2})^2 & -(\frac{1+z}{2})^2 \end{vmatrix} = -[2z(z^2+5) - 20] \neq 0$，故两尺度序列 $\{q_n\} = \{q_0,$

$q_1,q_2\}=\{-\frac{1}{2},1,-\frac{1}{2}\}$ 可以用于构造小波，于是由 $\hat{\psi}(\omega)=G(\frac{\omega}{2})\hat{\phi}(\frac{\omega}{2})=-\frac{1}{16}(i\omega)^2e^{-i\frac{5\omega}{4}}[\frac{\sin\frac{\omega}{4}}{\frac{\omega}{4}}]^5$ 两边取傅立叶逆变换可得相应的小波为

$\psi(x)=-\frac{1}{16}\frac{d}{dx^2}b^*b^*b^*b^*b(x-\frac{5}{4})$，其中 $\hat{b}(\omega)=\frac{\sin\frac{\omega}{4}}{\frac{\omega}{4}}$.

2.3 任意阶样条小波的构造

一般地，m 阶的样条函数作为尺度函数时，尺度函数的传递函数为：$H_m(\omega)=(e^{-i\frac{\omega}{2}}\cos\frac{\omega}{2})^m=(\frac{1+e^{-i\omega}}{2})^m$，两尺度符号为 $p_m(z)=(\frac{1+z}{2})^m$；取小波的传递函数为：$G_m(\omega)=-(ie^{-i\frac{\omega}{2}}\sin\frac{\omega}{2})^{m-1}=-(\frac{1-e^{-i\omega}}{2})^{m-1}$，则 $q_m(z)=-(\frac{1-z}{2})^{m-1}$，其中 $m\geqslant 2$. 由计算知[4]，当 $m=2r$（偶数）时，

$$\det M(z)=\begin{vmatrix}p(z) & p(-z)\\ q(z) & q(-z)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}(\frac{1+z}{2})^{2r} & (\frac{1-z}{2})^{2r}\\ -(\frac{1-z}{2})^{2r-1} & -(\frac{1+z}{2})^{2r-1}\end{vmatrix}=-[\frac{(1+z)^{4r-1}-(1-z)^{4r-1}}{2^{4r-1}}];$$

当 $m=2r+1$（奇数）时，

$$\det M(z)=\begin{vmatrix}p(z) & p(-z)\\ q(z) & q(-z)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}(\frac{1+z}{2})^{2r+1} & (\frac{1-z}{2})^{2r+1}\\ -(\frac{1-z}{2})^{2r} & -(\frac{1+z}{2})^{2r}\end{vmatrix}=-[\frac{(1+z)^{4r+1}-(1-z)^{4r+1}}{2^{4r+1}}].$$

显然，在 $|z|=1$ 上，$(1+z)$ 与 $(1-z)$ 的实部一个大于等于 1 而另一个却小于等于 1（不同时为 1），因此 $(1+z)^{4r+1}-(1-z)^{4r+1}\neq 0$，从而在 $|z|=1$ 上 $\det M(z)=\begin{vmatrix}p(z) & p(-z)\\ q(z) & q(-z)\end{vmatrix}$ 均不等于零，由定理 1.1 知，以上的传递函数能够用来构造样条小波.

于是得到以 $\phi_m(x)$ 为尺度函数的两尺度符号为：$p_m(z)=(\frac{1+z}{2})^m$，小波的两尺度符号为 $q_m(z)=-(\frac{1-z}{2})^{m-1}$，两尺度序列分别为：$\{p_n:n\in z\}=\{\frac{C_n^k}{2^{n-1}}:n\in z^+\}$，$\{q_n:n\in z\}=\{\frac{(-1)^{k+1}C_{n-1}^k}{2^{n-2}}:n\in z^+\}$，进一步地由构造方程 $\hat{\psi}(\omega)=G(\frac{\omega}{2})\hat{\phi}(\frac{\omega}{2})$ 可构造出相应的小波 $\psi(x)$.

以上构造方法简单，且很容易得到其解析式，用此构造方法可根据应用的需要构造出其他形式的非正交的样条小波.

2.4 对偶尺度函数与对偶小波的构造

由以上构造方法得到两尺度序列 $\{p_n:n\in z\}$，$\{q_n:n\in z\}$ 后，对任意输入的信号 $f(x)$，可由分解算法 $c_n^{j-1}=\sum_k p_{k-2n}c_k^j$，$d_n^{j-1}=\sum_k q_{k-2n}c_k^j$ 对信号 $f(x)$ 进行分析，而重构算法为 $c_k^j=\sum_n[\tilde{p}_{k-2n}c_n^{j-1}+\tilde{q}_{k-2n}d_n^{j-1}]$，为重构原信号需构造其对偶序列 $\{\tilde{p}_n:n\in z\}$，$\{\tilde{q}_n:n\in z\}$，为此引入如下定义和引理.

定义 2.4.1[3] 两尺度符号 $p(z)$ 和 $\tilde{p}(z)$ 称为是彼此对偶的，如果它满足恒等式

$$p(z)\overline{\tilde{p}(z)}+p(-z)\overline{\tilde{p}(-z)}=1,|z|=1. \tag{3}$$

引理 2.4.1[3] $\phi(x)$，$\{V_j\}_{j\in z}$ 和 $\tilde{\phi}(x)$，$\{\tilde{V}_j\}_{j\in z}$ 是两个多分辨分析，$p(z)$ 和 $\tilde{p}(z)$ 分别是对应的两尺度符号，如果 $\phi(x)$ 与 $\tilde{\phi}(x)$ 是一对对偶尺度函数，则 $p(z)$ 和 $\tilde{p}(z)$ 也相互对偶.

引理 2.4.2[3] 如果 $p(z)$ 和 $\tilde{p}(z)$ 是相互对偶的两个容许的两尺度符号，即 $p(z)=(\frac{1+z}{2})^N S(z)$，$\tilde{p}(z)=(\frac{1+z}{2})^{\tilde{N}}\tilde{S}(z)$，$|z|=1$ 且满足 $\max_{|z|=1}|S(z)|<2^{N-\frac{1}{2}}$，$\max_{|z|=1}|S(z)|<2^{\tilde{N}-\frac{1}{2}}$，则由 $\hat{\phi}(\omega)=\prod_{k=1}^{+\infty}H(\frac{\omega}{2^k})$，$\hat{\tilde{\phi}}(\omega)=\prod_{k=1}^{+\infty}G(\frac{\omega}{2^k})$ 确定的尺度函数 $\phi(x)$ 与 $\tilde{\phi}(x)$ 相互对偶.

引理 2.4.3 如果尺度函数 $\phi(x)$ 与 $\tilde{\phi}(x)$ 相互对偶，且 $q(z)$ 与 $\tilde{q}(z)$ 满足 $p(z)\overline{\tilde{p}(z)}+p(-z)\overline{\tilde{p}(-z)}=1$，$q(z)\overline{\tilde{q}(z)}+q(-z)\overline{\tilde{q}(-z)}=1$，$p(z)\overline{\tilde{q}(z)}+p(-z)\overline{\tilde{q}(-z)}=0$，$q(z)\overline{\tilde{p}(z)}+q(-z)\overline{\tilde{p}(-z)}=0$，即 $M(z)\overline{\tilde{M}^T(z)}=I$，则由 $\begin{cases}\hat{\psi}(\omega)=q(z)\hat{\phi}(\frac{\omega}{2})\\ \hat{\tilde{\psi}}(\omega)=\tilde{q}(z)\hat{\tilde{\phi}}(\frac{\omega}{2})\end{cases}$ 确定的 $\psi(x)$ 与 $\tilde{\psi}(x)$ 是相互对偶的小波，即 $<\psi_{mn},\psi_{kl}>=\delta_{mk}\cdot\delta_{nl}$. 且具有正交性：$<\phi_{mn},\tilde{\psi}_{mj}>=0$，$<\tilde{\phi}_{mn},\psi_{mj}>=0$ 对任意的 $m,n,j\in z$ 成立. 这个正交性也可表述为 $V_m\perp\tilde{W}_m$，$\tilde{V}_m\perp W_m$.

证明 $\delta_{mn} = <\phi_{0n}, \tilde{\phi}_{0m}> = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{\phi}(\omega)\overline{\hat{\tilde{\phi}}(\omega)z^{(n-m)}}\mathrm{d}\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}\sum_{k\in z}\hat{\phi}(\omega+2k\pi)\overline{\hat{\tilde{\phi}}(\omega+2k\pi)z^{(n-m)}}\mathrm{d}\omega \Leftrightarrow \sum_{k\in z}\hat{\phi}(\omega+2k\pi)\overline{\hat{\tilde{\phi}}(\omega+2k\pi)} = 1$ 对于 $\omega \in R$ 几乎处处成立[3].

$<\psi_{0n}, \tilde{\psi}_{0m}> = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{\psi}(\omega)\overline{\hat{\tilde{\phi}}(\omega)}e^{i(m-n)\omega}\mathrm{d}\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}\sum_{k\in z}\hat{\phi}(\frac{\omega}{2}+k\pi)\cdot\overline{\hat{\tilde{\phi}}(\frac{\omega}{2}+k\pi)q(e^{-i(\frac{\omega}{2}+k\pi)})\cdot\tilde{q}(e^{-i(\frac{\omega}{2}+k\pi)})}e^{i(m-n)\omega}\mathrm{d}\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}\{q(z)\overline{\tilde{q}(z)}+q(-z)\cdot\overline{\tilde{q}(-z)}]e^{i(m-n)\omega}\mathrm{d}\omega = \delta_{mn}$.

同理可证 $<\phi_{mn}, \tilde{\psi}_{mj}> = 0$, $<\tilde{\phi}_{mn}, \psi_{mj}> = 0$.

最后证明 $<\psi_{mn}, \tilde{\psi}_{jk}> = \delta_{mj}\delta_{nk}$.

若 $m < j$,则 $\psi_{mn}(x) \in W_m \subset V_j$,而 $V_j \perp \widetilde{W}_j$,所以 V_j 中的元素都与 $\tilde{\psi}_{jk}(x)$ 正交. 所以 $m < j$ 时 $<\psi_{mn}, \tilde{\psi}_{jk}> = 0$. 同理 $m > j$ 时 $<\psi_{mn}, \tilde{\psi}_{jk}> = 0$,$m = j$ 时由以上证明知 $<\psi_{mn}, \tilde{\psi}_{jk}> = \delta_{nk}$. 所以有 $<\psi_{mn}, \tilde{\psi}_{jk}> = \delta_{mj}\delta_{nk}$.

由 $M(z)\overline{\widetilde{M}^T(z)} = I = \overline{\widetilde{M}^T(z)}M(z)$,即

$$\begin{bmatrix}\overline{\tilde{p}(z)} & \overline{\tilde{q}(z)} \\ \overline{\tilde{p}(-z)} & \overline{\tilde{q}(-z)}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}p(z) & p(-z) \\ q(z) & q(-z)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0 \\ 0 & 1\end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}\overline{\tilde{p}(z)}p(z)+\overline{\tilde{q}(z)}q(z)=1 \\ \overline{\tilde{p}(z)}p(-z)+\overline{\tilde{q}(z)}q(-z)=0 \\ \overline{\tilde{p}(-z)}p(z)+\overline{\tilde{q}(-z)}q(z)=0 \\ \overline{\tilde{p}(-z)}p(-z)+\overline{\tilde{q}(-z)}q(-z)=1\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}\tilde{p}(z)\overline{p(z)}+\tilde{q}(z)\overline{q(z)}=1 \\ \tilde{p}(z)\overline{p(-z)}+\tilde{q}(z)\overline{q(-z)}=0\end{cases}, \tag{4}$$

在这里,序列 $\{p_n\}$,$\{q_n\}$,$\{\tilde{p}_n\}$,$\{\tilde{q}_n\}$ 是有限的,所以可以假定 $p(z)$,$q(z)$,$\tilde{p}(z)$,$\tilde{q}(z)$ 都是多项式. 于是由式(4)中第一个等式得出 $\overline{p(z)}$ 与 $\overline{q(z)}$ 没有公共的零点,从而由式(4)的第二个等式推出:

$$\tilde{q}(z) = \overline{\tilde{p}(-z)}R(z), \tilde{p}(z) = -\overline{q(-z)}R(z), \tag{5}$$

其中 $R(z)$ 是某个多项式.

将式(5)代入式(4)的第一个等式得:

$$R(z)[\overline{p(-z)}\,\overline{q(z)} - \overline{p(z)}\,\overline{q(-z)}] = 1, \tag{6}$$

由于括号内是一个单项式,而用 $R(z)$ 除常数得到一个多项式,所以 $R(z)$ 只能是一个单项式,即

$$R(z) = az^k, k \in z, \tag{7}$$

对于某个 $a \in \mathbb{C}$ 成立,由式(7)和式(5)得:

$$\tilde{q}(z) = az^k\,\overline{p(-z)}, \tilde{p}(z) = -az^k\,\overline{q(-z)}, \tag{8}$$

特别地取 $a = 1, k = 1$,得

$$\tilde{q}(z) = z\,\overline{p(-z)}, \tilde{p}(z) = -z\,\overline{q(-z)}, \tag{9}$$

即

$$\tilde{q}_n = (-1)^{n-1}\,\overline{p_{1-n}}, \tilde{p}_n = (-1)^n\,\overline{q_{1-n}}, \tag{10}$$

2.3 节已求得两尺度序列 $\{p_n : n \in z\} = \{\frac{C_n^k}{2^{n-1}} : n \in z^+\}$,$\{q_n : n \in z\} = \{\frac{(-1)^{k+1}C_{n-1}^k}{2^{n-2}} : n \in z^+\}$,由式(10)可求得序列 $\{\tilde{p}_n\}$ 和 $\{\tilde{q}_n\}$,从而对于任意非负整数 m,有 $\tilde{p}_m(z) = (\frac{1+z}{2})^{m-1}\cdot\frac{1}{z^{m-2}} = (\frac{1+z}{2})^{m-1}\tilde{S}(z)$,其中 $\tilde{S}(z) = \frac{1}{z^{m-2}}$;$\tilde{q}_m(z) = (-1)^m\frac{1}{z^{m-1}}(\frac{1-z}{2})^m$ 而 $p_m(z) = (\frac{1+z}{2})^m = (\frac{1+z}{2})^m S(z)$,其中 $S(z) = 1$. 可见 $p_m(z)$ 和 $\tilde{p}_m(z)$ 都是容许的两尺度符号[3],且满足 $\max_{|z|=1}|S(z)| = 1 = 2^0 < 2^{m-1-\frac{1}{2}}$,$\max_{|z|=1}|\tilde{S}(z)| = 1 = 2^0 < 2^{m-\frac{1}{2}}$,其中 $m \geqslant 2$,由引理 2.4.2 知由两尺度方程 $\begin{cases}\hat{\tilde{\phi}}(\omega) = \tilde{p}(z)\hat{\tilde{\phi}}(\frac{\omega}{2}) \\ \hat{\phi}(\omega) = p(z)\hat{\phi}(\frac{\omega}{2})\end{cases}$ 确定的尺度函数是相互对偶的,由引理 2.4.3 知由 $\begin{cases}\hat{\psi}(\omega) = q(z)\hat{\phi}(\frac{\omega}{2}) \\ \hat{\tilde{\psi}}(\omega) = \tilde{q}(z)\hat{\tilde{\phi}}(\frac{\omega}{2})\end{cases}$ 确定的小波函数 $\psi(x)$ 和 $\tilde{\psi}(x)$ 也是相互对偶的. 故由已知序列 $\{p_n : n \in z\}$,$\{q_n : n \in z\}$,利用公式 $\tilde{q}_n = (-1)^{n-1}\overline{p_{1-n}}$,$\tilde{p}_n = (-1)^n\overline{q_{1-n}}$ 可直接求出相应的对偶序列 $\{\tilde{p}_n : n \in z\}$,$\{\tilde{q} : n \in z\}$,并由两尺度方程 $\begin{cases}\hat{\tilde{\phi}}(\omega) = \tilde{p}(z)\hat{\tilde{\phi}}(\frac{\omega}{2}) \\ \hat{\tilde{\psi}}(\omega) = \tilde{q}(z)\hat{\tilde{\phi}}(\frac{\omega}{2})\end{cases}$ 可求出对偶尺度函数和小波.

3 结束语

本文基于小波的传递函数构造法构造的样条小波,很容易求得相应两尺度序列(小波分解序列)及其对偶序列(重构序列),这对于小波的理论和应用研究都具有重要的意义.

参考文献:

[1] 张兆宁. 小波的传递函数构造法[J]. 工科数学,2001,17(2):14-20.

[2] 程正兴. 小波分析算法与应用[M]. 西安:西安交通大学出版社,2000.

[3] 崔锦泰. 小波分析导论[M]. 程正兴译. 西安:西安交通大学出版社,1995.

[4] 张兆宁. 电力系统故障暂态信号分析中新的数学方法研究[D]. 天津:天津大学,1998.

(责任编辑:韦廷宗)