广西科学院学报 2006,22(2):116～119
Journal of Guangxi Academy of Sciences Vol. 22,No. 2 May 2006

二阶非线性微分方程的振动性质

Oscillation of a Class of Second Order Nonlinear Differential Equation

贾对红,唐清干

JIA Dui-hong,TANG Qing-gan

(桂林电子工业学院计算科学与数学系,广西桂林 541004)

(Department of Computational Science and Mathematics, Guilin University of Electronic Technology,Guilin,Guangxi,541004,China)

摘要:利用 Riccati 技巧以及积分平均技巧,得到判别二阶微分方程 $(r(t)\psi(x(t))x'(t))' + p(t)f(x(t))g(x'(t)) = 0$,二阶非线性时滞微分方程 $(r(t)\psi(x(t))x'(t))' + p(t)f(x(\tau(t)))g(x'(t)) = 0$ 和 $(r(t)\psi(x(t))x'(t))' + p(t)f(x(t),x(\tau(t)))g(x'(t)) = 0$,其中 $t \geqslant t_0$,振动的 3 个新的充分性定理.利用这 3 个新的充分性定理可以简单地判断方程的振动性.

关键词:微分方程 振动 Riccati 变换

中图法分类号:O175 **文献标识码**:A **文章编号**:1002-7378(2006)02-0116-04

Abstract: In this paper, we discuss a class of the second order nonlinear different equation: $(r(t)\psi(x(t))x'(t))' + p(t)f(x(t))g(x'(t)) = 0, t \geqslant t_0$, and the second order nonlinear delay different equation: $(r(t)\psi(x(t))x'(t))' + p(t)f(x(\tau(t)))g(x'(t)) = 0$, $(r(t)\psi(x(t))x'(t))' + p(t)f(x(t),x(\tau(t)))g(x'(t)) = 0, t \geqslant t_0$. We obtain three new sufficient condition by the Riccati-type transformation and integral technique. By these oscillation theorems, we can simply estimate the oscillation of the equation.

Key words: differential equation, oscillation, Riccati-type transformation

二阶微分方程

$$(r(t)\psi(x(t))x'(t))' + p(t)f(x(t))g(x'(t)) = 0, \tag{1}$$

二阶非线性时滞微分方程

$$(r(t)\psi(x(t))x'(t))' + p(t)f(x(\tau(t)))g(x'(t)) = 0 \tag{2}$$

和

$$(r(t)\psi(x(t))x'(t))' + p(t)f(x(t), x(\tau(t)))g(x'(t)) = 0, \tag{3}$$

其中 $t \geqslant t_0$,

的一个正常解具有任意大的零点,则称这个解是振动的.如果方程的所有正常解都是振动的,那么称这个方程是振动的[1].

收稿日期:2005-06-29
修回日期:2005-08-29
作者简介:贾对红(1979-),女,山西晋中人,硕士研究生,主要从事微分方程定性理论研究。

近十几年来,微分方程的振动和非振动性引起了许多学者的兴趣,得到了许多振动准则,当 $r(t) = 1, \psi(x(t)) = 1$ 时,在文献[1,2]中已研究过.文献[3]研究了方程(1)的振动性,并给出了一些振动性准则.本文则利用 Riccati 变换以及积分平均技巧,得到方程(1)～(3)振动的几个新的充分条件.在文献[3]中不能判断方程是否振动的问题,而利用我们的结论则完全可以判断.

我们先作如下定义和假设.

定义 设 $D_0 = \{(t,s): t > s \geqslant t_0\}$,$D = \{(t,s): t \geqslant s \geqslant t_0\}$,函数 $H \in C(D;(-\infty,\infty))$,属于函数族 Ω,满足:

(i) $H(t,t) = 0$ 对 $t \geqslant t_0$,$H(t,s) > 0$ 在 D_0 上.

(ii) $H(t,s)$ 在 D_0 上对 s 有连续非正的偏导数.

假设

(A1) $r(t) \in C^1(I,R_+)$,其中 $I = [t_0,\infty)$,$R_+ = (0,\infty)$;

(A2) $\psi(x)\in C^1(R,R)$，并且 $\psi(x)>0,x\neq 0$；且 $0<c_1\leqslant\psi(x)\leqslant c,c,c_1$ 为常数；

(A3) $p\in C(I,R_0),R_0=[0,\infty),p(t)$ 不最终为零；

(A4) $f(x)\in C(R,R),xf(x)>0,x\neq 0$；

(A5) $g\in C(R,R),g(y)\geqslant m>0,(y\in R),m$ 为常数.

1 主要结果

定理 1 假设(A1) ~ (A5) 成立，且

(A6) $f(x)/x\geqslant k>0,(x\neq 0),k$ 为常数.

又设存在函数 $h,H\in C(D,R),k\in C^1(I,R_+)$ 使得 H 属于 Ω，满足

$$-\frac{\partial}{\partial s}(H(t,s)k(s))=h(t,s)\sqrt{H(t,s)k(s)},(t,s)\in D_0. \tag{4}$$

若存在 $\rho\in C^1(I,R)$ 使得

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{H(t,t_0)}\int_{t_0}^{t}[H(t,s)k(s)\phi(s)-\frac{ca(s)r(s)}{4}h^2(t,s)]\mathrm{d}s=\infty, \tag{5}$$

其中 $a(s)=\exp(-2\int^s\rho(\sigma)\mathrm{d}\sigma),\phi(s)=a(s)[mkp(s)+c_1r(s)\rho^2(s)-c(r(s)\rho(s))']$，那么方程(1) 振动.

证明 若方程(1) 有一非振动解 $x(t)$，则存在充分大的 $T_0\geqslant t_0$，使得对所有 $t\geqslant T_0,x(t)\neq 0$. 不妨设，对所有 $t\geqslant T_0,x(t)>0$($x(t)$ 最终为负时，可类似证之). 定义

$$w(t)=a(t)r(t)\psi(x(t))(\frac{x'(t)}{x(t)}+\rho(t)). \tag{6}$$

求导式(6)，并且由方程(1) 及定理条件可得，对 $t\geqslant T_0$，

$$w'(t)=-2\rho(t)w(t)-a(t)p(t)g(x'(t))\frac{f(x(t))}{x(t)}+a(t)(r(t)\psi(x(t))\cdot\rho(t))'-a(t)r(t)\psi(x(t))[\frac{w(t)}{a(t)r(t)\psi(x(t))}-\rho(t)]^2\leqslant-\frac{w^2(t)}{ca(t)r(t)}-ma(t)kp(t)+ca(t)(r(t)\rho(t))'-c_1a(t)r(t)\rho^2(t)=-\frac{w^2(t)}{ca(t)r(t)}-\phi(t). \tag{7}$$

于是由式(7) 可得对所有 $t\geqslant T_0$，

$$\int_{T_0}^{t}H(t,s)k(s)\phi(s)\mathrm{d}s\leqslant-\int_{T_0}^{t}H(t,s)k(s)w'(s)\mathrm{d}s-\int_{T_0}^{t}H(t,s)k(s)\frac{w^2(s)}{ca(s)r(s)}\mathrm{d}s=H(t,T_0)k(T_0)w(T_0)-\int_{T_0}^{t}[\sqrt{\frac{H(t,s)k(s)}{ca(s)r(s)}}w(s)+\frac{1}{2}\sqrt{ca(s)r(s)}h(t,s)]^2\mathrm{d}s+\int_{T_0}^{t}\frac{ca(s)r(s)}{4}h^2(t,s)\mathrm{d}s,$$

进而由(ii) 可得对所有 $t\geqslant T_0$，

$$\int_{T_0}^{t}[H(t,s)k(s)\phi(s)-\frac{ca(s)r(s)}{4}h^2(t,s)]\mathrm{d}s\leqslant H(t,T_0)k(T_0)w(T_0)-\int_{T_0}^{t}[\sqrt{\frac{H(t,s)k(s)}{ca(s)r(s)}}w(s)+\frac{1}{2}\sqrt{ca(s)r(s)}h(t,s)]^2\mathrm{d}s\leqslant H(t,T_0)k(T_0)w(T_0)\leqslant H(t,T_0)k(T_0)|w(T_0)|\leqslant H(t,t_0)k(T_0)|w(T_0)|.$$

于是对 $t\geqslant T_0$，有

$$\int_{t_0}^{t}[H(t,s)k(s)\phi(s)-\frac{ca(s)r(s)}{4}h^2(t,s)]\mathrm{d}s=\int_{t_0}^{T_0}[H(t,s)k(s)\phi(s)-\frac{ca(s)r(s)}{4}h^2(t,s)]\mathrm{d}s+\int_{T_0}^{t}[H(t,s)k(s)\phi(s)-\frac{ca(s)r(s)}{4}h^2(t,s)]\mathrm{d}s\leqslant H(t,t_0)(\int_{t_0}^{T_0}|k(s)\phi(s)|\mathrm{d}s+k(T_0)|w(T_0)|).$$

因此，

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{H(t,t_0)}\int_{t_0}^{t}[H(t,s)k(s)\phi(s)-\frac{ca(s)r(s)}{4}h^2(t,s)]\mathrm{d}s\leqslant\int_{t_0}^{T_0}|k(s)\phi(s)|\mathrm{d}s+k(T_0)|w(T_0)|<\infty.$$

这与式(5) 矛盾. 故定理 1 得证.

作为定理 1 的直接结果，有：

推论 1 若式(5) 被替换为

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{H(t,t_0)}\int_{t_0}^{t}H(t,s)k(s)\phi(s)\mathrm{d}s=\infty, \tag{8}$$

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{H(t,t_0)}\int_{t_0}^{t}a(s)r(s)h^2(t,s)\mathrm{d}s<\infty, \tag{9}$$

则方程(1) 也振动.

定理 2 令 H,h,k 如定理 1 所设，假设(A1) ~ (A6) 成立，且

(A7) $\tau\in C(I,R),\tau(t)\leqslant t$，对 $t\geqslant t_0,\lim\limits_{t\to+\infty}\tau(t)=+\infty$；

若存在函数 $\rho\in C^1(I,R)$ 及常数 $\lambda\in(0,1)$ 使得

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{H(t,t_0)}\int_{t_0}^{t}[H(t,s)k(s)\phi(s)-\frac{ca(s)r(s)}{4}h^2(t,s)]\mathrm{d}s=\infty, \tag{10}$$

其中 $a(s)=\exp(-2\int^{s}\rho(\sigma)\mathrm{d}\sigma)$，$\phi(s)=a(s)[\lambda mkp(s)\frac{\tau(s)}{s}+c_1r(s)\rho^2(s)-c(r(s)\rho(s))']$，那么方程(2)振动.

证明 若方程(2)有一非振动解，如定理1，设存在充分大的 $T_0\geqslant t_0$，使得 $x(t)>0$ 对 $t\geqslant T_0$，$x(\tau(t))>0$，于是由方程(2)知，对 $t\geqslant T_0$，$x''(t)<0$，且易得 $x'(t)>0$，因此由文献[4]中的引理2.1知对 $\lambda\in(0,1)$，存在 $T_1\geqslant T_0$ 使得

$$x(\tau(t))\geqslant\lambda\frac{\tau(t)}{t}x(t),t\geqslant T_1. \tag{11}$$

定义 $w(t)$ 如式(6)，求导式(6)并由方程(2)，式(11)得，对所有 $t\geqslant T_1$，

$$W'(t)\leqslant-2\rho(t)w(t)-\lambda mka(t)p(t)\frac{\tau(t)}{t}+ca(t)(r(t)\rho(t))'-a(t)r(t)\psi(x(t))\cdot(\frac{w(t)}{a(t)r(t)\psi(x(t))}-\rho(t))^2\leqslant-\frac{w^2(t)}{ca(t)r(t)}-\phi(t).$$

类似于定理1的证明，定理2证毕.

下面考虑方程(3)且对 f 作如下假设.

假设

(B0) 若 x 与 y 同号，则 $f(x,y)$ 与 x,y 同号且 $f(x,y)\geqslant f_1(x)f_2(y)$，其中 f_1,f_2 满足：

(B1) $f_1(x)/x\geqslant k_1>0,x\in R$，$k_1$ 为常数；

(B2) $f_2(y)\geqslant k_2>0,(y\neq 0)$，$k_2$ 为常数；

(B3) $\tau\in C(I,R)$，$\lim\limits_{t\to\infty}\tau(t)=\infty$.

定理3 假设(A1)～(A5)成立，且(B0)～(B3)成立，H,h,k 如定理所设，若存在函数 $\rho\in C^1(I,R)$ 使得

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{H(t,t_0)}\int_{t_0}^{t}H(t,s)k(s)\phi(s)-\frac{ca(s)r(s)}{4}h^2(t,s)]\mathrm{d}s=\infty, \tag{12}$$

其中 $a(s)=\exp(-2\int^{s}\rho(\sigma)\mathrm{d}\sigma)$，$\phi(s)=a(s)[mk_1k_2p(s)+c_1r(s)\rho^2(s)-c(r(s)\rho(s))']$，那么方程(3)振动.

证明 设 $x(t)$ 为方程(3)的一非振动解. 不失一般性，假设对所有 $t\geqslant T_0\geqslant t_0$ 有 $x(t)>0$($x(t)<0$ 时的情况类似)，那么存在 $T_1\geqslant T_0$ 使得 $x(\tau(t))>0$，$x'(t)>0$，且 $x''(t)<0$. 定义 $w(t)$ 如式(6)，求导式(6)并运用方程(3)可得

$$w'(t)\leqslant-2\rho(t)w(t)-mk_1k_2a(t)p(t)+ca(t)(r(t)\rho(t))'-a(t)r(t)\psi(x(t))\cdot(\frac{w(t)}{a(t)r(t)\psi(x(t))}-\rho(t))^2\leqslant-\frac{w^2(t)}{ca(t)r(t)}-\phi(t).$$

类似于定理1的证明，定理3证毕.

注1 定理3改进了文献[1]的定理4(若 $r(t)=1,\psi(x(t))=1$ 时).

通过适当选取 H 和 k，根据定理1～3，我们可以给出方程(1)～(3)的一系列具体的振动准则. 例如，可选取 $H(t,s)=(t-s)^{n-1},(t,s)\in D,k(s)=s$，其中 $n>2$ 是整数，此时 $h(t,s)=(t-s)^{\frac{n-3}{2}}s^{-\frac{1}{2}}(ns-t)$，于是可得如下推论.

推论2 假设(A1)～(A6)成立，若存在 $\rho\in C^1(I,R)$ 使得

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{H(t,t_0)}\int_{t_0}^{s}s(t-s)^{n-1}\phi(s)-\frac{ca(s)r(s)}{4s}(t-s)^{n-3}(ns-t)^2\mathrm{d}s=\infty,$$

其中 $a(s)=\exp(-2\int^{s}\rho(\sigma)\mathrm{d}\sigma$，$\phi(s)=a(s)[mkp(s)+c_1r(s)\rho^2(s)-c(r(s)\rho(s))']$，那么方程(1)振动.

推论3 假设(A1)～(A7)成立，若 $\tau'(t)>0$，且存在 $\rho\in C^1(I,R)$ 使得

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{H(t,t_0)}\int_{t_0}^{t}[s(t-s)^{n-1}\phi(s)-\frac{ca(s)r(s)}{4s}(t-s)^{n-3}(ns-t)^2]\mathrm{d}s=\infty,$$

其中 $a(s)=\exp(-2k\int^{s}\rho(\sigma)\mathrm{d}\sigma)$，$\phi(s)=a(s)[\lambda mkp(s)\frac{\tau(s)}{s}+c_1r(s)\rho^2(s)-c(r(s)\rho(s))']$，那么方程(2)振动.

推论4 假设(A1)～(A5)，(B0)～(B3)成立，若存在 $\rho\in C^1(I,R)$ 使得

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{H(t,t_0)}\int_{t_0}^{t}[s(t-s)^{n-1}\phi(s)-\frac{ca(s)r(s)}{4s}(t-s)^{n-3}(ns-t)^2]\mathrm{d}s=\infty,$$

其中 $a(s)=\exp(-2\int^{s}\rho(\sigma)\mathrm{d}\sigma$，$\phi(s)=a(s)[mk_1k_2p(s)+c_1r(s)\rho^2(s)-c(r(s)\rho(s))']$，那么方程(3)振动.

2 例子

例1 从微分方程

$$[\frac{1+\cos^2t}{1+\sin^2t}(1+x^2(t))x'(t)]'+\frac{9(4-3\sin^2t)(1+\sin^2t)}{(1+\cos^2t)(10+\sin^2t)}x(t)(\frac{1}{9}+\frac{1}{1+x^2(t)})(1+x'^2(t))=0,t\geqslant 1,$$

可以看出对所有 $x,y\in R$，$\frac{f(x)}{x}=\frac{1}{9}$，$g(y)=1+$

$y^2 \geqslant 1, 1 \leqslant \psi(x) \leqslant 2$,故可知 $k = \frac{1}{9}, m = 1, c = 2, c_1 = 1$. 令 $\rho(t) = -\frac{1}{t}, n = 3$,那么可得 $a(t) = t^2$. 由计算可得

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t^2}\int_1^t s^3(t-s)^2\left[\frac{(4-3\sin^2 s)(1+\sin^2 s)}{(10+\sin^2 s)(1+\cos^2 s)} - \frac{1+\cos^2 s}{s^2(1+\sin^2 s)} - \frac{6\sin 2s}{s(1+\sin^2 s)^2}\right] - \frac{1}{2}s\frac{1+\cos^2 s}{1+\sin^2 s}(3s-t)^2 \mathrm{d}s \geqslant \limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t^2}\int_1^t\left[\frac{2}{11}s^3(t-s)^2 - \frac{3}{2}s^2(t-s)^2 - 2s(t-s)^2 - s(3s-t)^2\right]\mathrm{d}s = \infty.$$

由推论 2 知此方程是振动的,实际上 $x = \sin t$ 就是一个这样的解.

注 2 文献[3]的定理 2 不能判断此方程的振动性. 因为

$$f'(x) = \frac{(x^2-2)(x^2-5)}{9(1+x^2)^2},$$

$f'(x)$ 与 $f'(x)/\psi(x)$ 在$(-\infty, +\infty)$上改变符号 4 次,所以其定理 2 中的条件(H3)不成立.

例 2 微分方程

$$\left[\frac{2+\sin^2 t}{1+\sin^2 2t}(1+x^2(t))x'(t)\right]' + \frac{2(5-2\cos 2t)}{1+4\cos^2 2t}x(t-\tau)(1+x'^2(t)) = 0, t \geqslant 1,$$

明显对所有 $x, y \in R, f(x)/x = 1, g(y) = 1 + y^2 \geqslant 1$,故 $m = k = 1, c = 2, c_1 = 1$. 我们可取 $\rho(t) = -\frac{1}{t}, n = 3$,得 $a(t) = t^2$. 通过计算得到

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t^2}\int_1^t s^3(t-s)^2\frac{s-\tau}{s}\left[\frac{2(5-2\cos 2s)}{1+4\cos^2 2s} - \frac{2+\sin^2 s}{s^2(1+\sin^2 2s)} - \frac{2\sin 2s(1+\sin^2 2s - 6\cos 2s + 2\cos^2 2s)}{s(1+\sin^2 2s)^2}\right] - \frac{1}{4}s\frac{2+\sin^2 s}{1+\sin^2 2s}(3s-t)^2\mathrm{d}s \geqslant \limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t^2}\int_1^t\left[\frac{6}{5}s^3(t-s)^2\frac{s-\tau}{s} - 3s(t-s)^2 - s^2(t-s)^2 - \frac{3}{4}s(3s-t)^2\right]\mathrm{d}s = \infty.$$

例 3 从时滞微分方程

$$\left[\frac{2+\sin^2 t}{1+\cos^2 t}(1+\cos^2 t)x'(t)\right]' + \frac{2+4\sin^2 t}{(1+\sin^2 t)^3}x(t)\left[1+x^2\left(t+\frac{\pi}{2}\right)\right]^2(1+x'^2(t)) = 0, t \geqslant 1,$$

可以看出 $f_1(x)/x = 1, f_2(y) \geqslant 1, 1 \leqslant \psi(x) \leqslant 2$,所以 $k_1 = k_2 = 1, c = 2, c_1 = 1$,那么我们取 $\rho(t) = -\frac{1}{t}, n = 3$,得 $a(t) = t^2$. 计算可得

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t^2}\int_1^t s^3(t-s)^2\left[\frac{2+3\sin^2 s}{(1+\sin^2 s)^3} - \frac{2+\sin^2 s}{s^2(1+\cos^2 s)} + \frac{8\sin 2s}{s(1+\cos^2 s)^2}\right] - \frac{s}{4}\frac{2+\sin^2 s}{1+\cos^2 s}(3s-t)^2\mathrm{d}s \geqslant \limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t^2}\int_1^t\left[\frac{5}{8}s^3(t-s)^2 - 3s(t-s)^2 - \frac{3s}{4}(3s-t)^2\right]\mathrm{d}s = \infty.$$

由推论 4 知,此方程是振动的,事实上 $x = \cos t$ 就是一个这样的解.

注 3 文献[1]的定理 4 不能判断此方程的振动性.

注 4 若把定理 2 和定理 3 中的式(10),式(12)分别用类似于式(8),式(9)的条件替换,则相应的结论仍成立.

参考文献:

[1] 王其如. 二阶非线性微分方程的振动准则[J]. 数学学报,2001,44(2):371-376.

[2] ROGOVCHENKO YU V. Oscillation criteria for certain nonlinear differential equations[J]. J Math Anal Appl, 1999,229(5):399-416.

[3] 徐志庭. 一类二阶微分方程解的振动性质[J]. 应用数学,2001,14(增刊):212-216.

[4] ERBE L H. Oscillation criteria for second order nonlinear equations[J]. Canad Math Bull, 1973,16(2):49-56.

(责任编辑:邓大玉)

(上接第 115 页)

[4] 王学萌,郝永红,黄登宇. 中国人口结构的灰色动态预测[J]. 中国管理科学,2004(10):722-725.

[5] 王浣尘. 人口系统工程[M]. 上海:上海交通大学出版社,1985:1-13.

[6] 中华人民共和国国家统计局. 中国统计年鉴[M]. 1999—2004. 北京:中国统计出版社,1999-2004.

[7] 王学萌,罗建军. 灰色系统方法简明教程[M]. 成都:成都科技大学出版社,1993:12-21.

[8] 刘思峰,郭天榜,党耀国. 灰色系统理论及其应用[M]. 北京:科学出版社,1999:105-112.

[9] 董银兰,周艳华,解鸿泉. 人口学概论[M]. 北京:科学出版社,2004:193-195.

(责任编辑:韦廷宗)