广西科学院学报 2006,22(1):1～5
Journal of Guangxi Academy of Sciences Vol. 22, No. 1 February 2006

哈密顿图和欧拉图的一种判别方法

A Distinguishing Method of Hamilton Graphs and Euler Graphs

周炳生[1],**高向阳**[2]

ZHOU Bing-sheng[1], GAO Xiang-yang[2]

(1. 南京大学信息管理系,江苏南京 210008;2. 江苏海事职业技术学院,江苏南京 211170)

(1. Department of Information Management, Nanjing University, Nanjing, Jiangsu, 210008, China;2. Jiangsu Maritime Technical College, Nanjing, Jiangsu, 211170, China)

摘要:分析由延长而形成哈密顿回路、欧拉回路的特点,得出求图 $G(n,m)$ 的最大回路算法:给定始结点 x_i 和始边 $e_i(x_j)$. 采用最长路回延长法,对点 x_i 和边 $e_i(x_j)$ 分别求最长路回 HE 序列,在对点 x_i 求最长路回 HE 序列中,当出现长度为 n 的点回路的最长项,边 $e_i(x_j)$ 出现长度为 m 的边回路的最长项,或延长后所得路径中没有元素,便结束延长;如对点 x_i 有长度为 n 的最大点回路最长项,则 $G(n,m)$ 为哈密顿图;如对边 $e_i(x_j)$ 有长度为 m 的最大边回路最长项,则 $G(n,m)$ 为欧拉图.

关键词:哈密顿图 欧拉图 点回路 边回路 回路

中图法分类号:O157.5 **文献标识码**:A **文章编号**:1002-7378(2006)01-0001-05

Abstract: This paper puts forward the concepts of maximal node-cycle, maximal edge-cycle and maximal cycle. Hamilton cycle of graph $G(n,m)$ is the maximal node-cycle, Euier cycle is the maximal edge-cycle. Analyzing the characteristic of the node cycle and edge cycle by extension, We get the algorithm of the maximal node-cycle of $G(n,m)$. According to the gived initial node x_i and initial edge $e_i(x_j)$, Using the longest path-cycle extension algorithm, we get the relevant longest path-cycle HE sequence. If there is the maximal node-cycle item, $G(n,m)$ is Hamilton cycle. If there is the maximal edge-cycle item, $G(n,m)$ is Euier cycle. The distinguish between Hamilton graph and Euier graph can be generalized the question of maximal node-cycle.

Key words: Hamilton graph, Euler graph, node-cycle, edge-cycle, cycle

图 $G(n,m)$ 结点的集合为 $V=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$,边的集合为 $E=\{(x_1,x_2),\cdots,(x_t,x_s)\}=\{e_1,e_2,\cdots,e_m\}$,结点的个数为 $n=|V|$,边的条数为 $m=|E|$. 如 $x_1x_2\cdots x_j$ 表示 x_1 为始结点的一条路径,当 $x_1=x_j$,该路径为回路. 令边 $e_i=(x_h,x_j)$,表示为 $e_i=e_i(x_j)$, 则该路径可表示为 $p=e_1(x_2)e_2(x_3)\cdots e_{j-1}(x_j)$,在不产生误解时,则该路径可表示为 $p=e_1e_2\cdots e_{j-1}(x_j)$.

在无向图 $G(n,m)$ 中,如 $e_i=(x_h,x_j)$,因 $(x_h,x_j)=(x_j,x_h)$,故在不考虑边的端点的时候,有 $e_i(x_j)=e_i(x_h)$.

本文通过提出最大点回路、最大边回路及最大回路等概念,分析由延长而形成哈密顿回路、欧拉回路的特点,得出求图 $G(n,m)$ 的最大回路算法,可判别图 $G(n,m)$ 是哈密顿图或者是欧拉图.

1 相关概念

定义 1 边 $e_i=(x_h,x_j)=e_i(x_j)$ 中,x_h 为 e_i 的前导结点,x_j 为 e_i 的后继结点. x_h,x_j 为相邻结点,e_i 与 x_h,x_j 相关联.

定义 2 如 $p=x_1x_2\cdots x_j$,其中有相同点,称 p 为点通路表示,简称点通路;当其中各点均不相同时,称 p 为点路径表示,简称点路径;再当 $x_1=x_j$,则 p 为点回路表示,简称点回路;$p=e_1e_2\cdots e_{j-1}(x_j)$,$e_i=(x_i,x_{i+1})$,其中有相同边,称 p 为边通路表示,简

收稿日期:2005-04-05
修回日期:2005-05-30
作者简介:周炳生(1940-),男,江苏泰兴人,副教授,主要从事计算机、数学和信息学研究。

称边通路;当其中各边均不相同,称 p 为边路径表示,简称边路径;当 $x_1 = x_j$,x_1 为 e_1 的前导结点时,则 p 为边回路表示,简称边回路.

图论中的通路、路径和回路,本文细分为点通路、边通路、点路径、边路径、点回路、边回路,以便文后的讨论.

定义3 边路径 $e_1(x_2)e_2(x_3)\cdots e_{j-2}(x_{j-1})e_{j-1}(x_j)$ 中,$e_{j-2}(x_{j-1})$ 为 $e_{j-1}(x_j)$ 相邻 x_{j-1} 的前导边,$e_{j-1}(x_j)$ 为 $e_{j-2}(x_{j-1})$ 相邻 x_{j-1} 后继边. $e_{j-2}(x_{j-1})$ 与 $e_{j-1}(x_j)$ 为相邻 x_{j-1} 的边,x_{j-1} 与 $e_{j-2}(x_{j-1})$,$e_{j-1}(x_j)$ 相关联.

定义4 边 $e_i = (x_h, x_j)$ 中,结点 x_j 相邻的所有结点的集合,称为结点 x_j 的相邻点集,记为 $\Gamma(x_j)$. 与边 e_i 相邻 x_j 的所有边的集合,称为边 e_i 的 x_j 相邻边集,记为 $\Gamma(e_i(x_j))$.

推论1 $G(n,m)$ 中,如边 $e_i = (x_h, x_j)$,则 $\Gamma(e_i(x_h)) \neq \Gamma(e_i(x_j))$.

在不强调区分点通路、边通路情况下,可简称通路,点路径、边路径可简称路径,而点回路、边回路可简称回路. 连通图中,所有点路径长度 $\leqslant n-1$,点回路长度 $\leqslant n$,边路径长度 $\leqslant m-1$,边回路长度 $\leqslant m$.

定义5 $G(n,m)$ 中任始结点 x_i 的长度为 n 的点回路,称为 x_i 的最大点回路;任始边 $e_i(x_j)$ 的长度为 m 的边回路,称为 $e_i(x_j)$ 的最大边回路.

定理1 $G(n,m)$ 中结点 x_i 不存在最大点回路,则其它结点亦不存在最大点回路;边 $e_i(x_j)$ 不存在最大边回路,则其它边亦不存在最大边回路.

证明 $G(n,m)$ 中若其它边 $e_j(x_l)$ 存在最大边回路 c_j,根据最大边回路定义,不论 $G(n,m)$ 是否为无向图,边 $e_i(x_j)$ 为 c_j 中边,则 c_j 亦为边 $e_i(x_j)$ 的最大边回路,矛盾.

对结点 x_i,同理可证. 证毕.

推论2 $G(n,m)$ 中 x_i 的最大点回路即为 H 回路. 边 e_i 的最大边回路即为 E 回路.

由于哈密顿回路考虑对象是结点问题,欧拉回路考虑对象是边问题,对哈密顿回路可以用原始点开始的点回路来表示并研究,而欧拉回路可以用始边(原始点为前导结点的边)开始的边回路来表示并研究.

点路径 $x_1x_2\cdots x_{j-1}x_j$ 是从始结点 x_1 出发,经边 (x_1, x_2) 过渡延长到 x_2,…,不断延长到 x_j 而成的. 当点路径 $x_1x_2\cdots x_{j-1}$ 的终结点 x_{j-1} 延长到相邻点集中结点后,可能产生点通路、点路径、点回路. 由于点通路不能产生点路径、点回路,因而延长成最大点回路与点通路无关,故延长时应对相邻点集中结点进行判别,只延长到产生新点路径、点回路的结点.

同理,x_1 为前导结点的始边 $e_1(x_2)$ 的边路径 $e_1(x_2)e_2(x_3)\cdots e_{j-1}(x_j)e_j(x_{j+1})$ 是从边 $e_1(x_2)$ 出发,经 x_2 过渡延长到边 $e_2(x_3)$,…,不断延长到后继点为 x_{j+1} 的边 $e_j(x_{j+1})$ 而成的. 当边路径 $e_1e_2\cdots e_{j-1}(x_j)$ 的终边 $e_{j-1}(x_j)$ 延长到相邻边集中边后,可能产生边通路、边路径、边回路. 由于边通路不能产生边路径、边回路,因而延长成最大边回路与边通路无关,故延长时应对相邻边集中边进行判别,只延长到产生新边路径、边回路的边.

每延长一次,路径长度增加1.

因而在图 $G(n,m)$ 中,始结点 x_i 的哈密顿回路是点路径延长而成的长度为 n 的最大点回路,始边 $e_i(x_j)$ 的欧拉回路是边路径延长而成的长度为 m 的最大边回路.

由于哈密顿回路是始结点 x_i 开始的点回路,欧拉回路是始边 $e_i(x_j)$ 开始的边回路;哈密顿回路的形成是点路径通过边过渡延长到终结点相邻点集中结点,欧拉回路的形成是边路径通过点过渡延长到终边相邻边集中边;经有限次延长后,哈密顿回路长度为 n,欧拉回路长度为 m. 哈密顿回路用点回路来表示,而欧拉回路用边回路来表示后,延长模式是一样的,不同的是,当一个对象为点时,而另一个的对象却为边.

2 最大回路法和最大回路算法

定义6 图 $G(n,m)$ 中规定始结点 x_i 为长度为零的特殊路径,称为点路径 x_i. 始边 $e_i(x_j)$ 为长度是1的边路径 $e_i(x_j)$.

定义7 始结点 x_i 的点路径,每次延长后形成的路径和回路及未延长的所有路径、回路,称为 x_i 的所得路径. 始边 $e_i(x_j)$ 的边路径每次延长后形成的路径和回路及未延长的所有路径、回路,称为 $e_i(x_j)$ 的所得路径,统称为所得路径.

定义8 所得路径中的路径、回路称为元素.

本文的最长路回延长法延长原则:

原则1 取点路径 x_i 为所得路径的初始点路径元素,或边路径 $e_i(x_j)$ 为所得路径的初始边路径元素.

原则2 在所得路径中取长度最长的任一元素作延长用.

原则3 对点路径,每次延长到终结点的相邻

点集中的所有产生路径、回路的结点而得新的所得路径.对边路径,每次延长到终边的相邻边集中的所有产生路径、回路的边而得新的所得路径.

定义 9 最长路回延长法中对点路径,取作延长用的元素称为 x_i 的最长项.对边路径,取作延长用的元素称为边 $e_i(x_j)$ 的最长项,统称为最长项.

在最长路回延长法中,从点路径 x_i 或边路径 $e_i(x_j)$ 开始,随着不断延长,所得路径中的元素不断变化,而不断获得最长项.

定义 10 最长路回延长法中不断延长获得 x_i 的最长项构成的序列,称为 x_i 的最长路回点序列.不断延长获得边 $e_i(x_j)$ 的最长项构成的序列,称为边 $e_i(x_j)$ 的最长路回边序列,统称为最长路回序列.

有些最长路回序列中,可能没有最长项是回路,但由于在最长路回延长法中规定最长项延长后,可以产生路径、回路的元素,故最长项构成的序列,称为最长路回序列.

定理 2 图 $G(n,m)$ 中始结点 x_i 的最长路回序列仅包含始结点 x_i 的所有点路径、点回路.始边 $e_i(x_j)$ 的最长路回序列,仅包含始边 $e_i(x_j)$ 的所有边路径、边回路.

证明 设 $x_i\cdots x_t\cdots x_kx_j$ 不为 $G(n,m)$ 中点路径或回路,而 $x_i\cdots x_t\cdots x_k$ 为 $G(n,m)$ 中点路径,则只能是:(1)$x_i\cdots x_t\cdots x_kx_j$ 为点路径或回路时,边 (x_k,x_j) 不为 $G(n,m)$ 中边,故 $x_j\notin\Gamma(x_k)$;(2)$x_i\cdots x_t\cdots x_kx_j$ 为点路径时,x_j 不为 $G(n,m)$ 中点,而边 (x_k,x_j) 不为 $G(n,m)$ 中边,故 $x_j\in\Gamma(x_k)$,所以按延长原则,$x_i\cdots x_t\cdots x_k$ 延长不可能产生最长项 $x_i\cdots x_t\cdots x_kx_j$.故最长路回点序列中,不包含不是 $G(n,m)$ 中 x_i 为始结点的点路径、点回路.

另一方面,设 $x_i\cdots x_t\cdots x_kx_j$ 为 $G(n,m)$ 中点路径或回路,点路径 x_i 为最长路回点序列中首项,如点路径 $x_i\cdots x_t\cdots x_k$ 为最长路回点序列中第 h 项,则延长后获得的 $x_i\cdots x_t\cdots x_kx_j$ 在所得路径中为长度最长元素之一,对元素 $x_i\cdots x_t\cdots x_kx_j$:(1)如接着取作延长用,则最长项 $x_i\cdots x_t\cdots x_kx_j$,在最长路回点序列中为第 $h+1$ 项;(2)如在所得路径中,一直未能取作延长用,按最长路回延长法中延长原则,每次取长度最长的一个元素成最长项,则最长路回点序列中,自 h 项后所得路径中便有无限个元素而有无限个最项长,这与 $G(n,m)$ 中,x_i 的点路径、点回路的个数有限相矛盾.所以,$x_i\cdots x_t\cdots x_kx_j$ 一定会在某次所得路径中成为长度最长的元素,而取作延长用,成为最长项.

同理可证,始边 $e_i(x_j)$ 的最长路回边序列,仅包含始边 $e_i(x_j)$ 的所有边路径、边回路.

由于最大点回路是由长度为 $n-1$ 的点路径再经延长形成的,而长度 $\leqslant n-1$ 的点回路再延长不能形成新的点路径.因此,在用最长路回法延长时,可以不保留产生的长度 $\leqslant n-1$ 的点回路的元素.同理,在用最长路回法求始边 $e_i(x_j)$ 的最长路回边序列时,可以不保留产生的长度 $\leqslant m-1$ 的边回路的元素.

定义 11 最长路回法延长中对点路回序列,不保留延长产生长度 $\leqslant n-1$ 的点回路元素,而获得的最长路回序列,称为最长路回点 HE 序列.对边路回序列,不保留延长产生长度 $\leqslant m-1$ 的边回路元素,而获得的最长路回序列,称为最长路回边 HE 序列,统称为最长路回 HE 序列.

根据以上讨论得到最大路回法:

(1)对图 $G(n,m)$,给定始结点 x_i 和始边 $e_i(x_j)$;

(2)运用最长路回延长法,对点 x_i 和边 $e_i(x_j)$ 分别求最长路回 HE 序列;

(3)对点 x_i 求最长路回 HE 序列时,当出现长度为 n 的点回路的最长项,而对边 $e_i(x_j)$,当出现长度为 m 的边回路的最长项,或延长后所得路径中没有元素,便结束延长.

最长路回 HE 序列中,如对点 x_i 有长度为 n 的最大点回路最长项,则 $G(n,m)$ 为哈密顿图;如对边 $e_i(x_j)$ 有长度为 m 的最大边回路最长项,则 $G(n,m)$ 为欧拉图.

计算机处理时需保留所得路径中不断变化的未处理的元素,而最长项除需保留的外,一般无需保留.

定义 12 对于 $G(n,m)$,

首先将结点编序,如 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 后,下列表叫做 $G(n,m)$ 的点路径延长表 E_v,

$$E_v=\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{array}\left|\begin{array}{c} \\ e_{ij} \\ \\ \end{array}\right|,$$

(↑ 前导结点列)

其中,项 $e_{ij}=\begin{cases} x_j, & x_j\in\Gamma(x_i), \\ \text{空白}, & \text{其它情况}. \end{cases}$

首先将边编序,如 $e_1,e_2,\cdots,e_m$ 后,下列表叫做 $G(n,m)$ 的边路径延长表 E_E,

$$E_E = \begin{vmatrix} e_1(x_1) \\ e_2(x_2) \\ \vdots \\ e_m(x_{n-1}) \\ e_m(x_n) \end{vmatrix} e_{ij}(x_h) \begin{vmatrix} \\ \\ \\ \\ \end{vmatrix},$$

（↑ 前导边列）

其中，项 $e_{ij}(x_h) = \begin{cases} e_j(x_h), e_j(x_h) \in \Gamma(e_i(x_s)), \\ \quad x_s \text{ 为 } e_j(x_h) \text{ 前导结点时;} \\ \text{空白，其它情况.} \end{cases}$

注　对无向图，如边的两端点均有相邻边，则前导边列中，应出现 2 个不同后继结点的该边，否则一次，对有向图仅一次.

显然，对于给定图，结点或边编好序后，E_v 及 E_E 表便唯一确定，编序不同，其 E_v 及 E_E 表中项所在位置发生相应变化. 所以 E_v 及 E_E 表的项主要由图的拓朴结构决定. 通常，在 E_v 或 E_E 的第 i 行中，会有 e_{ij} 为空白，可以省去，而同行后面的项向前移动而成简表.

定义 13　路径表 Z_k 中 k 表示第 k 次处理后获得的表 Z. 表 Z 结构如下：

$$Z = \begin{vmatrix} a_n \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_1 \end{vmatrix}.$$

路径 a_n 为表顶路径，a_1 为表底路径，表中项按路径 $a_1, \cdots, a_i, a_{i+1}, \cdots, a_n$ 次序进表，而表顶路径 a_n 第一个出表，因此，表的修改是按后进先出的原则处理. 处理时，出表的路径可作标记或直接从表中删除，以后不再处理. 当 Z 表中没有未处理路径时，称为空表 $\varnothing$.

Z 表可采用分段表示，如

$$Z = \begin{vmatrix} a_n \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_1 \end{vmatrix} = Z_t \begin{vmatrix} a_n \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{i+1} \end{vmatrix},$$

其中，$Z_t = \begin{vmatrix} a_i \\ \vdots \\ a_1 \end{vmatrix}$，分段表示一般适用手工处理.

定义 14　最大回路表 C_k 中 k 表示第 k 次处理后获得表 C.

定义 15　延长运算 $\otimes$ 规定如下：对路径 a_n 延长，设 $a_n = y_i \cdots y_h$，有 $a_n \otimes E = |t_{ij}|$，对点路径有 $E = E_v$. 而对边路径有 $E = E_E$，则 $t_{ij} = y_i \cdots y_h y_j$，为 E 表前导点或边列中 y_h 延长到 E 表中相应行中结点或边的 y_j，其结果为长度增加 1 的新路径或回路. 其它情况，则 t_{ij} 为空白.

根据最大回路法，本文得到最大回路算法：

步骤 1：根据 $G(n,m)$ 求得相应表 E，其中点回路时，$E = E_v$. 边回路时，$E = E_E$.

步骤 2：令 $K = 0$，$C_0 = \phi$（ϕ 为空表）.

点回路时，$Z_0 = |x_i/0|$（0 为路径长度），$L = n$；

边回路时，$Z_0 = |e_i(x_j)/1|$（1 为路径长度），$L = m$；

步骤 3：将 Z_k 未处理表顶路径 a_n 出表，做出表标志或从表中删除.

步骤 4：处理出表路径 a_n：

(1) $k = k + 1$；

(2) 当路径 a_n 长度 $= L - 1$ 时，进行 $a_n \otimes E$ 延长处理，回路进 C 表，转步骤 5.

(3) 当路径 a_n 长度 $< L - 1$ 时，进行 $a_n \otimes E$ 延长运算，路径进 Z 表；

步骤 5：当 $C = \phi$ 且 $Z_k \neq \phi$，转步骤 3.

步骤 6：结束.

根据上述讨论，在步骤 5 中得到的表 C 中的回路为最大回路，并得到 H 图 -E 图的判别方法：

***H* 图-*E* 图的判别方法**　对图 $G(n,m)$，根据给定始点 x_i、始边 $e_i(x_j)$，用最大回路法求最大回路. 对始点 x_i，若存在最大点回路，则 G 为 H 图，否则不为 H 图. 对始边 $e_i(x_j)$，若存在最大边回路，则 G 为 E 图，否则不为 E 图.

3　*H* 图-*E* 图的判别方法

定义 16　权图 $G(n,m)$ 中始结点 x_i 的长度为 n 的有权值的点回路，称为 x_i 的权图最大点回路. 始边 $e_i(x_j)$ 的长度为 m 的有权值的边回路，称为 $e_i(x_j)$ 的权图最大边回路，统称为权图最大回路.

由于哈密顿回路是长度 n 的最大点回路，欧拉回路是长度为 m 的最大边回路，用文献[4]的最小权法，对始结点 x_i 求 λ 为 1 的最短哈密顿点回路时，将权延长表 E 改为有权的点路径延长表 E_v，所得最短哈密顿点回路，即 x_i 的权图最大点回路. 而权图中不同欧拉回路，有相同的权值而无不同阶之分，但因最小权法中，有参数 λ，故对始边 $e_i(x_j)$ 求欧拉回路时，仍需令 λ 为 1，并将权延长表 E 改为有权的边路径延长表 E_E，所得欧拉回路，即边 $e_i(x_j)$ 的权图最大边回路.

权图 *H* 图-*E* 图的判别方法　根据给定始点

x_i、始边 $e_i(x_j)$，对图 $G(n,m)$ 用 λ 阶短哈密顿回路的最小权法，求权图最大回路. 若存在权图最大点回路，则 G 为 H 图；若存在权图最大边回路，则 G 为 E 图.

同理，尤如图 $G(n,m)$ 为无向权图，可使用文献[5]求 λ 为 1 的始结点 x_i 的权图最大点回路，以及求 λ 为 1 的始边 $e_i(x_j)$ 的权图最大边回路.

无向权图 H 图-E 图的判别方法 根据给定始点 x_i、始边 $e_i(x_j)$，对图 $G(n,m)$ 用 λ 阶短哈密顿回路的匹配法求权图最大回路. 若存在权图最大点回路，则 G 为 H 图；若存在权图最大边回路，则 G 为 E 图.

对于非权图，如给各边赋于假设权值，则可用权图 H 图-E 图的判别方法判别.

4 实例

例 1 图 1 所示的图 $G(6,8)$ 是否为 H 图或 E 图.

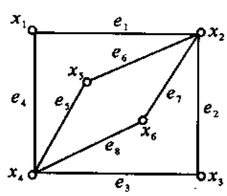

图 1 图 $G(6,8)$

解 在图 $G(6,8)$ 中，$n=6, m=8$.

设求 $e_1(x_2)$ 为始边的最大边回路.

图 $G(6,8)$ 边路径延长表为：

$$E_E=\left|\begin{array}{l|llll}
e_1(x_1) & e_4(x_4) & & & \\
e_1(x_2) & e_2(x_3) & e_6(x_5) & e_7(x_6) & \\
e_2(x_2) & e_1(x_1) & e_6(x_5) & e_7(x_6) & \\
e_2(x_3) & e_3(x_4) & & & \\
e_3(x_3) & e_2(x_2) & & & \\
e_3(x_4) & e_4(x_1) & e_5(x_5) & e_8(x_6) & \\
e_4(x_1) & e_1(x_2) & & & \\
e_4(x_4) & e_3(x_3) & e_5(x_5) & e_8(x_6) & \\
e_5(x_4) & e_3(x_3) & e_4(x_1) & e_8(x_6) & \\
e_5(x_5) & e_6(x_2) & & & \\
e_6(x_2) & e_1(x_1) & e_2(x_3) & e_7(x_6) & \\
e_6(x_5) & e_5(x_4) & & & \\
e_7(x_2) & e_1(x_1) & e_2(x_3) & e_6(x_5) & \\
e_7(x_6) & e_8(x_4) & & & \\
e_8(x_4) & e_3(x_3) & e_4(x_1) & e_5(x_5) & \\
e_8(x_6) & e_7(x_2) & & &
\end{array}\right|.$$

令 $k=0, Z_0=|e_1(x_2)/1|①, C_0=\varnothing$.

其中 ① 表示 $e_1(x_2)$ 为表 Z 中第一个出表处理路径，1 为 $e_1(x_2)$ 长度.

$$\text{因为 } e_1(x_2)\otimes E_E=\left|\begin{array}{l} e_1e_7(x_6)/2 \\ e_1e_6(x_5)/2 \\ e_1e_2(x_3)/2 \end{array}\right|,$$

$$\text{所以 } Z_1=Z_0\left|\begin{array}{l} e_1e_7(x_6)/2 \\ e_1e_6(x_5)/2 \\ e_1e_2(x_3)/2 \end{array}\right|②, C_1=\varnothing,$$

其中，② 表示 $e_1e_7(x_6)$ 为表 Z 中第 2 个出表处理路径.

同理可得，$Z_2, C_2, \cdots, Z_6, C_6$，

因为 $C_7=|e_1e_7e_8e_5e_6e_2e_3e_4(x_1)/8|$.

C 中有长度是 8 的始边 $e_1(x_2)$ 的最大边回路，即为欧拉回路 $x_1x_2x_6x_4x_5x_2x_3x_4x_1$.

所以，$G(6,8)$ 为 E 图.

另设求 x_1 为始点的最大点回路.

图 $G(6,8)$ 点路径延长表为：

$$E_v=\left|\begin{array}{l|llll}
x_1 & x_2 & x_4 & & \\
x_2 & x_1 & x_3 & x_5 & x_6 \\
x_3 & x_2 & x_4 & & \\
x_4 & x_1 & x_3 & x_5 & x_6 \\
x_5 & x_2 & x_4 & & \\
x_6 & x_2 & x_4 & &
\end{array}\right|.$$

令 $k=0, Z_0=|x_1/0|①, C_0=\phi$,

其中，点路径 x_1 长度为 0.

$$\text{因为 } x_1\otimes E_V=\left|\begin{array}{l} x_1x_4/1 \\ x_1x_2/1 \end{array}\right|,$$

$$\text{所以 } Z_1=Z_0\left|\begin{array}{l} x_1x_4/1 \\ x_1x_2/1 \end{array}\right|②, C_1=\phi.$$

同理可得，$Z_2, C_2, \cdots, Z_6, C_6, \cdots$

最后得 $Z_{27}=\phi, C_{27}=\phi$.

由于 $G(6,8)$ 不存在始点 x_1 的最大点回路，不存在哈密顿回路，所以 $G(6,8)$ 不为 H 图.

参考文献：

[1] 约翰逊 D E，约翰逊 J R[美]. 图论与工程应用[M]. 孙惠泉，等译. 北京：人民邮电出版社，1982.

[2] 耿素云，屈婉玲. 离散数学[M]. 北京：高等教育出版社，1998.

[3] 周炳生. 网络中多始点与终点路径的延长算法[J]. 上海技术师范学院学报(自然科学版)，1989(1)：32-38.

[4] 周炳生，周勤. λ 阶短哈密顿回路的最小权法[J]. 广西科学院学报，2005，21(2)：67-70.

[5] 周炳生，周勤. λ 阶短哈密顿回路的匹配法[J]. 广西科学院学报，2006，22(1)：6-10.

(责任编辑：黎贞崇)