λ 阶短哈密顿回路的最小权法

The Minimal Weight Method of the λ Level Short Hamilton Cycle

周炳生[1]**，周 勤**[2]

Zhou Bingsheng[1], Zhou Qin[2]

(1. 南京大学信息管理系，江苏南京 210008；2. 南京金陵科技学院图书馆，江苏南京 210008)

(1. Dept. of Info. Mana., Nanjing University, Nanjing, Jiangsu, 210008, China; 2. Library, Jinling Institute of Technology, Nanjing, Jiangsu, 210008, China)

摘要：提出短哈密顿回路的概念，分析由延长而形成最短哈密顿回路的特点，得出求权图 $G(n,m)$ λ 阶短哈密顿回路的最小权法. 该最小权法不但可精确求得最短和其它阶的短哈密顿回路，而且可用于权图 $G(n,m)$ 的判别，得出求 λ 阶短路径的最小权法.

关键词：权图　哈密顿　最短哈密顿回路　最小权法　最短路径

中图法分类号：O158　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1002-7378(2005)02-0067-04

Abstract: The concept of the short Hamilton cycle is introduced. The minimal weight method to solve λ level short Hamilton cycle of weight graph $G(n,m)$ is obtained by analysis of the features of the shortest Hamilton resulted from extended. Using this method can accurately get the shortest and the other's level short Hamilton cycles. This method can be used to distinguish weight graph $G(n,m)$ and get the minimal weight method to solve λ level short path.

Key words: weight graph, Hamilton, shortest Hamilton cycle, minimal weight method, shortest path

图 $G(n,m)$ 中，结点的集合为 $V=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$，边的集合 $E=\{(x_1,x_2),\cdots\}$，令 $n=|V|$，$m=|E|$.

定义 1 $G(n,m)$ 的边 $e_i=(x_i,x_j)$ 中，x_i,x_j 为相邻结点，结点 x_i 相邻的所有结点的集合，称为结点 x_i 的相邻结点集，记为 $\Gamma(x_i)$.

定义 2 路径 $P=x_1x_2\cdots x_j$ 的权，记为 $W(x_1x_2\cdots x_j)=\sum W(x_k,x_{k+1})$，$W(x_k,x_{k+1})$ 为边 (x_k,x_{k+1}) 的权值，$k=1,\cdots,j-1$. 若路径 $P=x_1x_2\cdots x_j$ 中，$x_j=x_1$，则 P 为回路 C，回路权值最小的回路称为 x_1 的最短回路.

$G(n,m)$ 中，任两结点间的路径长度小于等于 $n-1$，任结点 x_i 的回路长度小于等于 n.

最短哈密顿回路的权值是唯一的，但最短哈密顿回路可能不止一条.

收稿日期：2004-09-23
修回日期：2005-01-04
作者简介：周炳生(1940-)，男，江苏泰兴人，副教授，主要从事数学、信息学、图论等研究。

哈密顿图一定为连通图. 所以，在 $G(n,m)$ 中，哈密顿路径长度等于 $n-1$，哈密顿回路长度等于 n.

$G(n,m)$ 中，路径 $x_1x_2\cdots x_j$ 是从 x_1 出发，经边 (x_1,x_2) 延长到 x_2，再经边 (x_2,x_3) 等，不断延长到 x_j 而形成的. 路径 $x_1x_2\cdots x_{j-1}$ 的终结点 x_{j-1} 延长到相邻集中结点时，可能产生：

(1) 通路. 即 $x_j\in\Gamma(x_{j-1})$ 时，$x_j\in\{x_2,\cdots,x_{j-2}\}$；

(2) 路径. 即 $x_j\in\Gamma(x_{j-1})$ 时，$x_j\notin\{x_1,\cdots,x_{j-2}\}$；

(3) 回路. 当 $x_1\in\Gamma(x_{j-1})$ 时，$x_j=x_1$.

由于，通路不能产生路径、回路. 延长时应对相邻集中结点进行判别，只延长到产生新路径或回路的结点.

定义 3 在权图 $G(n,m)$ 中，x_i 的所有哈密顿回路，按其权值从小到大排序，其序号 λ 称为该回路的阶 λ，该回路称为 x_i 的 λ 阶短哈密顿回路.

规定：$\lambda=1$ 为最短哈密顿回路；$\lambda=2$ 为次短哈密顿回路；其它类推.

显然，同 λ 值，可能有几条不同短哈密顿回路，它们均为 λ 阶短哈密顿回路.

延长产生最短哈密顿回路的方法有2种：

(1) 每次只延长到终结点的相邻集中距离最小的结点的近邻法[1,2]. 很明显，求得的哈密顿回路，不一定是最短.

(2) 求出全部哈密顿回路，经比较得出最短的[2,3]. 而求出全部哈密顿回路的方法，可以是每次将所有路径的终结点延长到相邻集中的所有结点形成路径，当路径长度等于 $n-1$，再延长得出哈密顿回路[4]. 很明显，求得的哈密顿回路不一定都是需要的.

本文介绍了每次取权值最小的路径、回路延长，延长时延长到终结点的相邻集中的所有形成路径、回路的结点的最小权法，给出 λ 阶短哈密顿回路的最小权算法，根据该算法可从给定的 λ 得出最短到 λ 阶的短哈密顿回路.

1　λ 阶短哈密顿回路的最小权算法

定义4　图 $G(n,m)$ 中，规定始结点 x_i 为权值是零且长度是零的特殊路径，称为路径 x_i.

定义5　始结点 x_i 的路径，每次延长后形成的路径和回路及未延长的所有路径、回路，称为 x_i 的所得路径(简称所得路径).

定义6　所得路径中的路径、回路称为元素.

考虑下列最小权路回延长法的延长原则：

原则1　取路径 x_i 为所得路径的初始路径.

原则2　每次在所得路径中，取权值最小的元素作延长用.

原则3　每次延长到终结点的相邻集中的所有产生路径、回路的结点，而得新的所得路径.

定义7　在最小权路回延长法中，取作延长用的元素，称为 x_i 最小权项(简称最小权项).

在最小权路回延长法中，从路径 x_i 开始，随着不断延长，所得路径中的元素不断变化，而不断获得最小权项.

定义8　在最小权路回延长法中，不断获得的最小权项构成的序列，称为 x_i 的最小权路回序列(简称最小权路回序列).

定理1　在权图 $G(n,m)$ 中，始结点 x_i 的最小权路回序列为按权值的增序列.

证明　序列的第1项为路径 x_i，权值是零. 最小权项每延长1次，所得元素权值增大，所以，序列的其它最小权项权值均大于零.

设 P、L 为任意的最小权项，P 权 $\leqslant L$ 权.

当 P 权 $=L$ 权时，P、L 在所得路径中的相应元素同时权最小，如同时取出，P、L 在序列中为并列最小权项. 如先任取其一处理后，在下次所得路径中的另一相应元素权仍为最小的，故 P、L 在序列中为相邻位置的最小权项.

当 P 权 $<L$ 权时，则在所得路径中出现 P 的相应元素时，如 L 的相应元素同时出现，因 P 权 $<L$ 权，所以 P 的相应元素权 $<L$ 的相应元素权，则序列中 P 应在 L 前出现. 如 L 的相应元素不同时出现，则 L 的相应元素只能是其它元素再延长获得，则序列中 P 在 L 前出现.

定理2　在权图 $G(n,m)$ 中，始结点 x_i 的最小权路回序列，仅包含 x_i 为始结点的所有路径、回路.

证明　设 $x_i\cdots x_t\cdots x_kx_j$ 为 $G(n,m)$ 中任意路径或回路，因路径 x_i 为最小权路回序列中首项，如路径 $x_i\cdots x_t\cdots x_k$ 为最小权路回序列中第 h 项，则延长获得的 $x_i\cdots x_t\cdots x_kx_j$ 在所得路径中，(1) 如权最小，则最小权项 $x_i\cdots x_t\cdots x_kx_j$，在最小权路回序列中为第 $h+1$ 项. (2) 如权不为最小，按最小权路回延长法中延长原则，每次至少取权值最小的一个元素，成最小权项，如 $x_i\cdots x_t\cdots x_kx_j$ 权值一直不为最小，则最小权路回序列中，自 h 项后有无限个最小权项，这和 $G(n,m)$ 中，x_i 的路径、回路的个数有限相矛盾. 所以，在以后处理的所得路径中，$x_i\cdots x_t\cdots x_kx_j$ 权值一定会为最小而成最小权项.

另一方面，设 $x_i\cdots x_t\cdots x_kx_j$ 不为 $G(n,m)$ 中路径或回路，而 $x_i\cdots x_t\cdots x_k$ 为 $G(n,m)$ 中路径，则只能是 (1)$x_i\cdots x_t\cdots x_kx_j$ 为路径或回路时，边 (x_k,x_j) 不为 $G(n,m)$ 中边，故 $x_j\notin\Gamma(x_k)$. (2)$x_i\cdots x_t\cdots x_kx_j$ 为路径时，x_j 不为 $G(n,m)$ 中点，而边 (x_k,x_j) 不为 $G(n,m)$ 中边，故 $x_j\notin\Gamma(x_k)$，所以，不可能产生最小权项 $x_i\cdots x_t\cdots x_kx_j$. 故最小权路回序列中，不包含不是 $G(n,m)$ 中 x_i 为始结点的路径、回路.

由此可知，x_i 的最小权路回序列实为 $G(n,m)$ 中，x_i 为始结点的所有路径(包括路径 x_i)、回路，按权值从小到大排列的序列.

推论1　x_i 的最小权路回序列中，第1个长度为 n 的回路的最小权项，为 x_i 的最短哈密顿回路. 第 λ 个长度为 n 的回路的最小权项，为 x_i 的 λ 阶短哈密顿回路.

定理3　权图 $G(n,m)$ 中，x_i 的最短哈密顿回路，即为 $G(n,m)$ 中最短哈密顿回路.

证明　设 C_i 为 x_i 的最短 H 回路，C_j 为 x_j 的最

短 H 回路，设 $W(C_j)<W(C_i)$，根据 H 回路定义，x_i 为 C_j 中结点，故 C_j 亦为 x_i 的最短 H 回路，与 C_i 为 x_i 最短 H 回路相矛盾. 同理，当 $W(C_j)>W(C_i)$ 时，与 C_j 为 x_j 最短 H 回路相矛盾. 所以，有 $W(C_i)=W(C_j)$，故 C_i 为 $G(n,m)$ 中最短 H 回路.

因为，回路延长不能产生新路径、回路. 哈密顿回路是由长度为 $n-1$ 的路径再经延长形成的，而长度小于等于 $n-1$ 的回路再延长，不能形成新的路径. 因此，在用最小权路回法延长时，可以不保留产生的长度小于等于 $n-1$ 的回路的元素.

定义 9 在最小权路回法延长时，不保留延长产生长度小于等于 $n-1$ 的回路的元素，获得的最小权路回序列，称为最小权路回哈密顿序列.

根据以上讨论，得到 λ 阶短哈密顿回路的最小权法：

对权图 $G(n,m)$ 给定始结点 x_i 和 λ 值，在用最小权路回延长法，求 x_i 的最小权路回哈密顿序列时，当出现第 λ 个长度为 n 的回路的最小权项或延长后所得路径中没有元素，便结束运算. 则第 1 个到第 λ 个长度为 n 的回路最小权项，为始结点 x_i 的最短到 λ 阶短哈密顿回路. 如没有长度为 n 的回路最小权项，则 $G(n,m)$ 不为哈密顿图.

在计算机处理时，需保留的是所得路径中不断变化的未处理的元素，而最小权项除需保留的外，一般无需保留.

定义 10 将图 $G(n,m)$ 中，结点编序如 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 后，下列表叫做 $G(n,m)$ 的权延长表 E(简称 E 表).

$$E=\begin{array}{c|c|}x_1 & \\ x_2 & \\ \vdots & e_{ij} \\ \vdots & \\ x_n & \end{array},$$

(↑ 前导结点列)

其中，项 $e_{ij}=$

$$\begin{cases}x_j/W(x_i,x_j)\text{，当 } x_i\neq x_j \text{ 且 } x_i \text{ 为 } x_j \text{ 的前导结点时} \\ \qquad\qquad \text{其中 } W(x_i,x_j) \text{ 为边}(x_i,x)\text{ 权，} \\ \text{空白，} \qquad \text{其它情况.}\end{cases}$$

显然，对于给定图，E 表中项由图的拓朴结构和边权确定，结点编序不同，其表中项所在位置发生相应变化. 通常，在 E 的第 i 行中，会有 e_{ij} 为空白，可以省去，而同行后面的项向前移动而成简表，本文均使用简表.

定义 11 路径表 Z_k，其中，k 表示第 k 次处理后的表 Z，其项为第 k 次延长后，添加所得新路径或回路及其权值后的所得路径. ϕ 表示空表.

路径表 Z 结构如下：

$$Z=\left|\begin{array}{c}a_1\\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_n\end{array}\right|,$$

Z 表可采用分段表示，如

$$Z=\left|\begin{array}{c}a_1\\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_n\end{array}\right|=Z_t=\left|\begin{array}{c}a_{i+1}\\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ a_n\end{array}\right|,$$

其中，$Z_t=\left|\begin{array}{c}a_1\\ \vdots \\ a_i\end{array}\right|.$

分段表示，一般适用手工处理.

定义 12 最小权路径表 M_k，其中，k 表示第 k 次处理后的表 M. 其项 m_s 为 Z 中作下次延长用权最小路径或回路及其权值的最小权项. ϕ 表示空表.

定义 13 最小权回路 C_k，其中，k 表示第 k 次处理后的表 C，其项为 M 中长度为 n 的最小权回路(哈密顿回路). ϕ 表示空表.

定义 14 延长运算 ⊗. 延长运算，产生新路径或回路.

设 $m_s=x_i\cdots x_h/W(x_i\cdots x_h)/L$， 其中，$W(x_i\cdots x_h)$ 为 $x_i\cdots x_h$ 的权，L 为 $x_i\cdots x_h$ 的长度.

$$M_k\otimes E=|m_s|\otimes|e_{hj}|=|t_{ij}|,$$

则

$$t_{ij}=\begin{cases}x_i\cdots x_hx_j/W(x_i\cdots x_h)+W(x_h,x_j)/L+1, \\ \qquad \text{当 } x_h \text{ 为 } x_j \text{ 的前导结点且 } x_j \\ \qquad \text{与 } x_{i+1},\cdots,x_h \text{ 均不相同时；} \\ \text{空白，其它情况.}\end{cases}$$

当 $x_j=x_i$ 时，t_{ij} 为回路，否则为路径.

下面给出 λ 阶短哈密顿回路的最小权算法：

步骤 1 根据 $G(n,m)$，得到相应的 E 表；

步骤 2 设初始值：

给定始点 x_i，λ 值，取 n 值.

令 $Z_0=|x_i/0/0|$(第一个 0 为该项的权，第二个 0 为该项的长度)，

$M_0=\phi,C_0=\phi,K=0,i=1$；

步骤 3 取 Z_k 中权最小的项存入 M_k 表，且 Z_k 中作被选标志(如 ① 等标志）或删除；

步骤 4 将 M_k 中长度为 n 的项，存入 C_k 表中，

$i = i + 1$，当 $i > \lambda$ 时，转步骤 8 结束；

步骤 5　$k = k + 1$；

步骤 6　对 M_{k-1} 中长度 $< n$ 的项，计算 $M_{k-1} \otimes E$，结果新路径或长度为 n 新回路存入 Z_k；

步骤 7　当 $Z_k \neq \phi$ 时，令 $M_k = \phi$，转步骤 3；

步骤 8　结束.

则表 C 中项，为 1 到 λ 阶的短哈密顿回路. 如 $C = \phi$，则 $G(n,m)$ 不为哈密顿图.

在计算机处理时，应根据使用语言的特点，算法步骤可作适当调整，而提高处理速度，减少存贮量.

2　λ 阶短哈密顿回路的最小权法的改进

当 $G(n,m)$ 中 n、m 增大，所得路径中元素会急剧增加. 本文对无向图的哈密顿回路分析后，在 λ 阶短哈密顿回路的最小权法基础上，获得的 λ 阶短哈密顿回路的匹配法，在相同始点和 λ 条件下，匹配法比最小权法会少处理大量最小权项. $G(n,m)$ 不为哈密顿图时，可少处理约一半最小权项，其它情况，可少处理更多最小权项.

3　λ 阶短路径的最小权法

定义 15　在权图 $G(n,m)$ 中，x_i 为始点 x_j 为终点的所有路径，按其权值从小到大排序，其序号 λ 称为该路径的阶 λ，该路径称为始点 x_i 终点 x_j 的 λ 阶短路径.

规定：$\lambda = 1$ 为最短路径；$\lambda = 2$ 为次短路径；其它类推.

因为，回路再延长，不能形成新的路径. 因此，如将最小权路回延长法的延长原则 3 改为如下，则称为最小权路径延长法：

原则 4　每次延长到终结点的相邻集中的所有路径的结点，而得到新的所得路径.

定义 16　在最小权路径延长法中，不断获得的最小权项构成的序列，称为 x_i 的最小权路径序列（简称最小权路径序列）.

同样，类似 λ 阶短哈密顿回路的最小权法，得到了 λ 阶短路径的最小权法：

对权图 $G(n,m)$ 给定始结点 x_i，终点 x_j 和 λ 值，在用最小权路径延长法，求 x_i 的最小权路径序列时，当出现第 λ 个终点为 x_j 的路径的最小权项或延长后所得路径中没有元素，便结束运算. 则第 1 个到第 λ 个终点为 x_j 的路径最小权项，为始点 x_i 终点 x_j 的最短到 λ 阶短路径.

4　算例

例 1　求图 $G(8,12)$ 的最短哈密顿回路和次短哈密顿回路（图 1）.

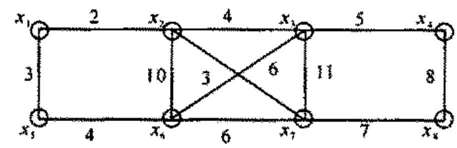

图 1　图 $G(8,12)$

解　$G(8,12)$ 中，$n = 8$，$\lambda = 2$，始点设为 x_1.

根据图 1，得到相应的 E 表：

$$E = \left|\begin{array}{l|llll} x_1 & x_2/2 & x_5/3 & & \\ x_2 & x_1/2 & x_3/4 & x_6/10 & x_7/3 \\ x_3 & x_2/4 & x_4/5 & x_6/5 & x_7/11 \\ x_4 & x_3/5 & x_8/8 & & \\ x_5 & x_1/3 & x_6/4 & & \\ x_6 & x_2/10 & x_3/5 & x_5/4 & x_7/6 \\ x_7 & x_2/3 & x_3/11 & x_6/6 & x_8/7 \\ x_8 & x_4/8 & x_7/7 & & \end{array}\right|.$$

令 $Z_0 = |x_1/0/0|$，$M_0 = \phi$，$C_0 = \phi$，

则 $Z_0 = |x_1/0/0|$①，$M_0 = |x_1/0/0|$，$C_0 = \phi$.

因为　$M_0 \otimes E = \left|\begin{array}{l} x_1x_2/2/1 \\ x_1x_5/3/1 \end{array}\right|$，

所以　$Z_1 = \left|\begin{array}{l} x_1x_2/2/1 \\ x_1x_5/3/1 \end{array}\right|$②，

$M_1 = |x_1x_2/2/1|$，$C_1 = \phi$.

同理有

$$Z_2 = \left|\begin{array}{l} x_1x_5/3/1 \\ x_1\ x_2\ x_3/6/2 \\ x_1x_2\ x_6/12/2 \\ x_1x_2\ x_7/5/2 \end{array}\right| \begin{array}{l} ③ \\ \\ \\ ④ \end{array} \qquad M_2 = |x_1x_5/3/1|, C_2 = \varphi.$$

同理可得 $Z_3, M_3, C_3, \cdots\cdots, Z_{30}, M_{30}, C_{30}, \cdots$

最后有

$$Z_{33} = \left|\begin{array}{l} x_1x_5x_6x_2x_7x_8x_4x_3/40/7 \\ x_1x_5x_6x_2x_3x_4x_8x_7/41/7 \\ x_1x_2x_6x_7x_3x_4x_8/42/6 \\ x_1x_2x_6x_3x_7x_8x_4/43/6 \\ x_1x_5x_6x_2x_7x_3x_4x_8/44/7 \\ x_1x_5x_6x_2x_3x_7x_4x_8/47/7 \end{array}\right|,$$

$$M_{33} = \left|\begin{array}{l} x_1x_5x_6x_2x_3x_7x_8/39/6 \\ x_1x_2x_3x_4x_8x_7x_6x_5x_1/39/8 \\ x_1x_5x_6x_7x_8x_4x_3x_2x_1/39/8 \end{array}\right|,$$

（下转第 75 页）

1995,15(4):345-349.

[4] 肖笃宁,胡远满,李秀珍,等.环渤海三角洲湿地的景观生态学研究[M].北京:科学出版社,2001.

[5] 邬建国.景观生态学——格局、过程、尺度和等级[M].北京:教育出版社,2000.

[6] 刘灿然,陈灵芝.北京地区植被景观中斑块形状的指数分析[J].生态学报,2000,20(4):559-567.

[7] 汪爱华,张树清.三江平原沼泽湿地景观空间格局变化[J].生态学报,2003,23(2):237-243.

[8] 郭晋平.森林景观生态研究[M].北京:北京大学出版社,2001.

[9] Romme W H. Fire and landscape diversity in subalpine forests of Yellow National Park [J]. Ecological Monogruph,1982,52:199-211.

[10] Li H,Reynolds J F. A new contagion index to quantify spatial pattern of landscapes [J]. Landscape Ecology,1993,8:155-162.

[11] 马克明,傅伯杰,周华锋.北京东灵山地区景观格局及破碎化评价[J].植物生态学报,2000,24(3):320-326.

(责任编辑:黎贞崇)

(上接第70页)

$$C_{33}=\left|\begin{array}{l}x_1x_2x_7x_8x_4x_3x_6x_5x_1/37/8\\x_1x_5x_6x_3x_4x_8x_7x_2x_1/37/8\\x_1x_2x_3x_4x_8x_7x_6x_5x_1/39/8\\x_1x_5x_6x_7x_8x_4x_3x_2x_1/39/8\end{array}\right|.$$

C 中2条权37的回路为始点 x_1 的最短 H 回路,两条权39的回路为次短 H 回路,$G(8,12)$ 为 H 权图.

注 ①,②,③,④ 为 Z 中项取出处理的次序.

参考文献:

[1] 徐洁磐,惠永涛编著.离散数学及其在计算机中的应用(修订版)[M].北京:人民邮电出版社,1988.147-153.

[2] 祝颂和,陆诗娣,陈建明编.离散数学[M].西安:西安交通大学出版社,1996.

[3] 耿素云,屈婉玲编著.离散数学[M].北京:高等教育出版社,1998.

[4] 周炳生.网络中多始点与终点路径的延长算法[J].上海技术师范学院学报(自然科学版),1989,(1):32-38.

[5] 姚源果.用矩阵判断哈密顿图的一个充要条件[J].广西民族学院学报(自然科学版),2001,7(1):9-10.

(责任编辑:黎贞崇)