Da 空间和 Fa 空间*

Da Spaces and Fa Spaces

董 鸽[1]，魏文展[2]

Dong Ge[1], Wei Wenzhan[2]

（1. 上海大学数学系，上海 200444；2. 广西师范学院数学系，广西南宁 530001）

(1. Dept. of Math., Shanghai Univ., Shanghai, 200444, China;

2. Dept. of Math., Guangxi Teachers Education Univ., Nanning, Guangxi, 530001, China)

摘要：根据 Ba 空间的产生方法，引出 Da 空间、Fa 空间等一系列新空间，并讨论它们的性质.

关键词：Ba 空间　Da 空间　Fa 空间

中图法分类号：O177　**文献标识码**：A　**文章编号**：1002-7378(2005)01-0007-03

Abstract: The method to create Ba spaces is employed to create Da spaces and Fa spaces. Some properties of Da space and Fa space were discussed.

Key words: Ba space, Da space, Fa space

Ba 空间的一般形式首先由丁夏畦和罗佩珠给出[1]，它是由一列线性赋范空间生成的函数空间，此后很多学者对其性质作了研究。但由一列线性赋准范空间或一列度量空间采用类似的方法生成的空间未见相关报道. 本文就此问题提出 Da 空间、Fa 空间等概念，并且 Ba 空间的部分性质在这些空间上同样适用.

1 Da 空间

1.1 Da 空间的定义

定义 1 设 $D_1,\cdots,D_m,\cdots$ 是一列距离空间，$a_1,\cdots,a_m,\cdots$ 是一列非负实数，$f(z)=\sum_m a_m z^m$ 是一非常数的整函数，对 $u,v\in\bigcap_m D_m$ 且 $u-v\in\bigcap_m D_m$，若幂级数

$$I_D(u-v,\alpha)=\sum_m a_m\alpha^m d_{D_m}^m(u,v),\alpha>0 \quad (1)$$

有非零的收敛半径，则称 $u-v\in DL(f)$，简记 $DL(f)\equiv Da\equiv(D_m,a_m)$. 以下都设 α 大于 0.

在 Da 上定义

$$d_{Da}(u,v)=\inf\{1/\alpha;I_D(u-v,\alpha)\leqslant 1\}, \quad (2)$$

则 d_{Da} 是一个距离，从而 (Da,d_{Da}) 是一个距离空间.

记 d_{Da} 为 d，则 d 还是一个平移不变距离. 若 $v=0$，此时定义变为：对 $\forall\ u\in\bigcap_m D_m$，若幂级数

$$I_D(u,\alpha)=\sum_m a_m\alpha^m d_{D_m}^m(u,0)$$

有非零的收敛半径，则称 $u\in DL(f)$，或 $u\in Da$. $d_{Da}(u,0)=\inf\{1/\alpha;I(u,\alpha)\leqslant 1\}$. 本文有

$$Da=\{u;u\in\bigcap_m D_m;I_D(u,\alpha)<\infty,\text{对某个 }\alpha>0\},$$

$$aD=\{u;u\in\bigcap_m D_m;I_D(u,\alpha)<\infty,\text{对任意 }\alpha>0\},$$

显然 aD 为 Da 的子空间.

当 D_m 为赋范空间 B_m 时，相应的 Da 即为 Ba 空间. 其中，$\|u\|_{Da}=d_{Da}(u,0)$. 相应的 aD 空间即为 aB 空间.

1.2 Da 空间的主要结果

定理 1 假设(H1) $\forall\ i,j$，或者 $D_i\subset D_j$，或者 $D_j\subset D_i$；

(H2) 若 $D_i\subset D_j$，则 $d_{D_j}(u,v)\leqslant d_{D_i}(u,v)$，$\forall\ u,v\in D_i$；

(H3) $\forall\ m$，D_m 完备.

则称 Da 是一完备的距离空间.

证明 设 $\{u_n\}$ 是 Da 空间中的任一 Cauchy 列，则当 $a_m>0$ 时，$\{u_n\}$ 是 D_m 中的 Cauchy 列，从而对任意自然数 m，$\exists\ v_m\in D_m$，使得 $d_{D_m}(u_m,v_m)\to 0(n\to\infty)$. $\forall\ i,j,\varepsilon>0$，$\exists\ N$，使得

$$d_{D_i}(u_N,v_i)<\varepsilon/2,d_{D_j}(u_N,v_j)<\varepsilon/2.$$

若 $D_i\subset D_j$ 则 $d_{D_j}(v_i,v_j)\leqslant d_{D_j}(u_N,v_i)+$

收稿日期：2004-04-12

修回日期：2004-06-24

作者简介：董 鸽(1980-)，女，江苏兴化人，博士研究生，主要从事泛函分析研究。

* 广西自然科学基金(桂科基 0448036)和广西教育厅科研项目(2004 年)资助。

$d_{D_j}(u_N,v_j)\leqslant d_{D_i}(u_N,v_i)+d_{D_j}(u_N,v_j)<\varepsilon$;

若 $D_j\subset D_i$，则 $d_{D_i}(u_i,v_i)\leqslant d_{D_i}(u_N,v_i)+d_{D_i}(u_N,v_j)\leqslant d_{D_i}(u_N,v_i)+d_{D_j}(u_N,v_j)<\varepsilon$，

由 ε 的任意性，$d_{D_j}(v_i,v_j)=0$ 或 $d_{D_i}(v_i,v_j)=0$.
$\therefore v_i=v_j,\forall\ i,j$. 令 $v=v_i=v_j$，则有 $v\in\bigcap_m D_m$ 且 $d_{D_m}(u_n,v)\to 0(n\to\infty),\forall\ m$. 因 $\{u_n\}$ 是 Cauchy 列，故对 $\forall\ k,\exists\ N_k$，当 $N_k\to\infty$ 时由(1)，(2)式有 $d(u_{N_k},u_p)\leqslant 1/k,\forall\ p\geqslant N_k$. 从而 $\forall\ p\geqslant N_k,\exists\ \alpha_{N_{k,p}}$，使得

$$\sum_m a_m\alpha^m_{N_{k,p}}d^m_{D_m}(u_{N_k},u_p)\leqslant 1,\tag{3}$$

且 $1/\alpha_{N_{k,p}}\leqslant 1/k$.

分2种情况讨论：

（Ⅰ）若 $\exists\ k$，使得序列 $\{\alpha_{N_{k,p}}\}$ 无界，则存在子序列 $\{\alpha_{N_{k,p_i}}\},\alpha_{N_{k,p_i}}\to\infty(i\to\infty)$ 故

$$d(u_{N_k},u_{p_i})\leqslant\frac{1}{\alpha_{N_{k,p_i}}}\to 0(i\to\infty),$$

所以 $u_{p_i}\to u_{N_k}(i\to\infty)$. 从而 $u_n\to u_{N_k}(n\to\infty)$，$u_{N_k}\in Da$.

（Ⅱ）对 $\forall\ k$，若 $\{\alpha_{N_{k,p}}\}$ 有界. 固定 k，存在 $\alpha_{N_{k,p_i}}\to\alpha_{N_k}(i\to\infty)$ 显然，$1/\alpha_{N_k}\leqslant 1/k$.

由(3)式，$\sum_{m=1}^{M}a_m\alpha^m_{N_{k,p}}d^m_{D_k}(u_{N_k},u_{p_i})\leqslant 1,\forall\ M$. 令 $i\to\infty$ 得，$\sum_{m=1}^{M}a_m\alpha^m_{N_k}d^m_{D_m}(u_{N_k},v)\leqslant 1,\forall\ M$. M 是任意的，从而 $\sum_{m=1}^{\infty}a_m\alpha^m_{N_k}d^m_{D_m}(u_{N_k},v)\leqslant 1$，故 $d(u_{N_k},v)\leqslant\frac{1}{\alpha_{N_k}}\leqslant\frac{1}{k}$. 让 $k\to\infty$，$d(u_{N_k},v)\to 0$，则 $u_{N_k}\to v(k\to\infty)$，从而 $u_n\to v(n\to\infty)$，且 $v\in Da$，事实上，如上固定 $k,\exists\ \alpha_{N_k}$，使 $d(u_{N_k},v)\leqslant\frac{1}{k}$. 因 $\{u_n\}$ 为 Cauchy 列，从而有界，即 $\exists\ M>0,d(u_{N_k},0)<M,\forall\ m$. 而 $f(z)$ 是整函数，则 $\{a_m^{\frac{1}{m}}\}$ 有界，即存在 $r>0$，使 $a_m^{\frac{1}{m}}\leqslant r,m=1,2,\cdots$

取 $\alpha_0=\min\{\alpha_{N_k},\frac{1}{2rM}\}$，则

$$\sum_{m=1}^{\infty}a_m\alpha_0^m d^m_{D_m}(u_{N_k},0)\leqslant\sum_{m=1}^{\infty}r^m(\frac{1}{2rM})^m M^m=1,$$

$\therefore d(u_{N_k},0)\leqslant\frac{1}{\alpha_0}$. 故 $d(v,0)\leqslant d(u_{N_k},v)+d(u_{N_k},0)\leqslant\frac{1}{k}+\frac{1}{\alpha_0}$，则由(2)式可以得到

$\sum_m a_m\frac{1}{d^m(v,0)}d^m_{D_m}(v,0)\leqslant 1<\infty$. 所以 $v\in Da$.

定理证毕.

定理2 若 $\exists\ m_0$，使得 $d_{D_m}(u,v)\leqslant d_{D_{m_0}}(u,v)$，$\forall\ m$，并且 D_{m_0} 可分，则 Da 可分.

证明 $(Da,d_{D_{m_0}})$ 可分，事实上，Da 是 D_m 的子空间，令 E 是 $(Da,d_{D_{m_0}})$ 的可数子集，取 $\delta>0$，使得 $\Phi(\alpha)=\sum_{m=1}^{\infty}a_m\alpha^m<1,|\alpha|<\delta$. 对任意 $u\in Da$ 及 $\varepsilon\in(0,\delta)$，存在 $v\in E$，使得 $d_{D_{m_0}}(u,v)<\varepsilon$. $f(z)$ 是整函数，则 $\{a_m^{\frac{1}{m}}\}$ 有界，即 $\exists\ r>0$，使 $a_m^{\frac{1}{m}}\leqslant r,m=1,2,\cdots$，从而

$$I_D(u-v,\frac{1}{2r\varepsilon})\leqslant\sum_{m=1}^{\infty}a_m(\frac{1}{2r\varepsilon})^m\cdot d^m_{D_{m_0}}(u,v)<\sum_{m=1}^{\infty}a_m(\frac{1}{2r\varepsilon}\cdot\varepsilon)^m\leqslant\sum_{m=1}^{\infty}2^{-m}=1,$$

故 $d(u,v)<2r\varepsilon$. 因此 E 在 (Da,d) 中也稠密.

定理证毕.

定理3 若 aD 有一稠密子集 E，且 E 为紧集，则 aD 可分.

证明 E 为 aD 的稠密子集，且 E 紧，则 E 全有界，从而 E 可分，存在 A 为 E 的可数稠密子集. 下面证 A 在 aD 中也稠密. 事实上，对 $\forall\ u\in aD,\exists\ v\in E$，使得 $d(u,v)<\varepsilon/2$. A 在 E 中稠密，则 $\exists\ w\in A$，使得 $d(v,w)<\varepsilon/2$. 故 $d(u,w)\leqslant d(u,v)+d(v,w)<\varepsilon$. 又因 A 可数，从而 aD 可分. 定理证毕.

推论1 若 Da 有一紧稠密子集，则 Da 可分.

证明 只要把定理3证明中"aD"换成"Da"即可.

注1 此性质对于一般度量空间都成立.

注2 Da 空间为 Ba 空间时，推论即为"若 Ba 有一稠密子集，则 Ba 可分". aD 为 aB 空间时，定理3为"若 aB 有一紧稠密子集，则 aB 可分".

2 *Fa* 空间

本文先定义 Fa 空间，再将 Ba 空间上一些性质推广到 Fa 空间上.

2.1 *Fa* 空间的定义

定义2 设 $F_1,\cdots,F_m,\cdots$ 是一列赋准范线性空间，$a_1,\cdots,a_m,\cdots$ 是一非负实数列且有无限多个不为零，$f(z)=\sum_m a_m z^m$ 是一整函数，对任意 $u\in\bigcap_m F_m$，若幂级数

$$I_F(u,\alpha)=\sum_m a_m\|u\|^m_{F_m}\alpha^m,\alpha>0\tag{4}$$

有非零的收敛半径，则称 $u\in FL(f)$，或简记 $FL(f)\equiv Fa\equiv(F_m,a_m)$. 其中 $\|\cdot\|_{F_m}$ 为 F_m 上的准范数，$m=1,2,3,\cdots$.

在 Fa 中定义

$$\| u \|_{Fa} = \inf\{1/\alpha; I_F(u,\alpha) \leqslant 1\}, \alpha > 0, \quad (5)$$

则 $\|\cdot\|_{Fa}$ 为一准范数，从而 $(Fa, \|\cdot\|_{Fa})$ 是一赋准范线性空间.

显然，$\|\cdot\|_{F_m}$ 及 $\|\cdot\|_{Fa}$ 也是距离，事实上，令 $d_{F_m}(u,v) = \|u-v\|_{F_m}, \forall u,v \in F_m, \forall m$. 则 $d_{Fa}(u,v) = \|u-v\|_{Fa}, \forall u,v \in Fa$. 且 $\|\cdot\|_{Fa}$ 是一平移不变距离，从而 Da 空间已证明的一些定理都对 Fa 空间适用. 此外，Fa 空间还有下面一些结论成立. 以下简记 $\|\cdot\|_{Fa}$ 为 $\|\cdot\|$. 此外，显然有 $Fa = \{u \in \bigcap_m F_m; I_F(u,\alpha) < \infty$，对于某个 $\alpha > 0\}$.

2.2 Fa 空间的主要结果

定理 4 若 $F_1, \cdots, F_m, \cdots$ 是一列完备赋准范线性泛函空间，且每个 F_m 中每个基本序列都包含一个 p.p. 收剑的子序列，则 Fa 也是一个完备赋准范线性泛函空间，即 Fréchet 泛函空间.

证明 只须证完备性. 设 $\{u_n\}$ 是 Fa 中的一基本列，对 $\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon)$，使 $\forall n,l > N(\varepsilon)$，有 $\|u_n - u_l\|_{Fa} < \varepsilon$. 显然，$\{u_n\}$ 也是 F_m 中的一基本列. 则存在 p.p. 收敛的子序列 $\{u_{n_k}\}$，不仅是 Fa 中的基本列，而且也是 F_m 中的基本列，$\forall m$. 对任何固定的自然数 N，有

$$\sum_{m=1}^{N} a_m \|u_{n_{k_1}} - u_{n_{k_2}}\|_{Fa}^{-m} \|u_{n_{k_1}} - u_{n_{k_2}}\|_{F_m}^{m} \leqslant 1.$$

对 $\forall \varepsilon > 0, \exists k$，使得 $\forall k_1, k_2 > k$，有 $\|u_{n_{k_1}} - u_{n_{k_2}}\|_{Fa} < \varepsilon < 1$，因而

$$\sum_{m=1}^{N} a_m \|u_{n_{k_1}} - u_{n_{k_2}}\|_{F_m}^{m} \leqslant \|u_{n_{k_1}} - u_{n_{k_2}}\|_{Fa} < \varepsilon.$$

让 $k_2 \to \infty$，得 $\sum_{m=1}^{N} a_m \|u_{n_{k_1}} - u\|_{F_m}^{m} \leqslant \varepsilon$. 让 $N \to \infty$，$\sum_{m=1}^{\infty} a_m \|u_{n_{k_1}} - u\|_{F_m}^{m} \leqslant \varepsilon$ 且 $u_{n_{k_1}} - u \in Fa, u \in Fa$. 事实上，$Fa$ 为线性空间，又 $u_{n_{k_1}} \in Fa, u = u - u_{n_{k_1}} + u_{n_{k_1}}$. 若 $k_2, k_3 \to \infty$，则

$$\left| \|u_{n_{k_1}} - u_{n_{k_2}}\|_{Fa} - \|u_{n_{k_1}} - u_{n_{k_3}}\|_{Fa} \right| \leqslant \|u_{n_{k_2}} - u_{n_{k_3}}\|_{Fa} \to 0,$$

则 $\exists \lambda_{k_1} \leqslant \varepsilon$，当 $k_2 \to \infty$ 时 $\|u_{n_{k_1}} - u_{n_{k_2}}\|_{Fa} \to \lambda_{k_1}$. 对于固定的 N，

$$\sum_{m=1}^{N} a_m \|u_{n_{k_1}} - u_{n_{k_2}}\|_{Fa}^{-m} \|u_{n_{k_1}} - u_{n_{k_2}}\|_{F_m}^{m} \leqslant 1.$$

让 $k_2 \to \infty$，有 $\sum_{m=1}^{N} a_m \lambda_{k_1}^{-m} \|u_{n_{k_1}} - u\|_{F_m}^{m} \leqslant 1$. 再让 $N \to \infty$，得 $\sum_{m=1}^{\infty} a_m \lambda_{k_1}^{-m} \|u_{n_{k_1}} - u\|_{F_m}^{m} \leqslant 1$.

故 $\|u_{n_{k_1}} - u\|_{Fa} \leqslant \lambda_{k_1} \leqslant \varepsilon$，从而 $u_{n_{k_1}} \Rightarrow u$. 又 $\{u_n\}$ 是一基本列，所以 $u_n \Rightarrow u$. 定理证毕.

定理 5 设 X 是线性赋准范空间，则 X^* 是 Fa 空间.

证明 取 $X_m = X, m = 1,2,\cdots$，则 $X_m^* = X^*, m = 1,2,\cdots$. $\bigcap_m X_m^* = X^*$.

对 $\forall u \in \bigcap_m X_m^* = X^*$，$u$ 是有界的，即 $\exists M > 0$，使 $\|u\|_{X^*} \leqslant M$，从而 $\|u\|_{X_m^*} \leqslant m, \forall m$. $f(z) = \sum_m a_m z^m$ 是一非常数的整函数，则 $\{a_m^{\frac{1}{m}}\}$ 有界，$\exists r > 0$，使 $a_m^{\frac{1}{m}} \leqslant r, m = 1,2,\cdots$ 取 $\alpha_0 = (2rm)^{-1} > 0$，则 $I_F(u,\alpha_0) \leqslant \sum_m r^m (2rM)^{-m} \|u\|_{X_m^*}^{m} \leqslant 1 < \infty$. $\therefore u \in \{u \in \bigcap_m F_m; I_F(x,\alpha) < \infty$，对某个 $\alpha > 0\}$. 另一方面，$X^* \supset \{u \in \bigcap_m F_m; I_F(u,\alpha) < \infty$，对某个 $\alpha > 0\}$ $\therefore X^* = \{u \in \bigcap_m F_m; I_F(u,\alpha) < \infty$，对某个 $\alpha > 0\}$.

定理证毕.

参考文献:

[1] Ding Xiaxi, Luo Peizhu. *Ba* spaces and some estimates of Laplace operator[M]. In: Theory of Ba Spaces and Its Applications. Beijing: Science Bress, 1992. 1-24.

[2] Zhuang Yadong, Yu Xintai. Some properties of Ba spaces [M]. In: Theory of Ba Spaces and Its Applications. Beijing: Science Press, 1922. 153-163.

[3] 俞鑫泰. Banach 空间几何理论[M]. 上海: 华东师范大学出版社, 1986.

[4] 关肇直. 泛函分析讲义[M]. 北京: 高等教育出版社, 1960.

(责任编辑: 黎贞崇)

关于蛋白动态性质的新发现

蛋白的动态性质对其功能来说非常重要，但其动态性质经常是与蛋白结构分开考虑的。一种确定结构的新方法将 NMR 光谱方法与分子动态模拟结合起来，显示出一系列可相互转换的构形，它们构成一个蛋白在细胞中的原始状态。研究人员将这一方法应用于人类"泛素"，发现传统的结构确定方法严重低估这种原始状态的可变性。尤其是该蛋白的侧链，它们具有高度可变性，甚至在骨干原子动态范围更为有限的憎水核中也是如此。

(据《科学时报》)