关于图同构复杂性的一点补充

A Supplement of the Complexity of Graph Isomorphism Test

罗示丰

Luo Shifeng

(广西大学计算机与信息工程学院,广西南宁 530004)

(Coll. of Comp. & Info. Engi. ,Guangxi Univ. ,Nanning,Guangxi,530004,China)

摘 要:在图 $G=(V,E)$ 中,删除其度数最大的顶点及其关联的边,在余下的子图中,如法炮制,直至余下的子图为零图.设所删除的这些顶点 $x_1,x_2,\cdots,x_l$ 的度数依次为 $P_1,P_2,\cdots,P_l$,称序列 $P_1,P_2,\cdots,P_l$ 为图 G 的度序列;$x_i(1\leqslant i\leqslant l)$ 关联的边的另一端点在 G 中的度数的集合称为顶点 x_i 关联的度集合.通过计算、比较两图的度序列、被删除的顶点的度数以及它们关联的度集合,证明两图同构问题的复杂度是多项式的.

关键词:图同构 复杂性 多项式 度序列 度集合

中图法分类号:O157.5

Abstract: The vertex with maximum degree and its incidence edges in the graph G are deleted. The remaning subgraphs follow in the same way until the last subgraph empty. If degrees of the deleted vertexes $x_1,x_2,\cdots,x_l$ are $P_1,P_2,\cdots,P_l$ in order. The series $P_1,P_2,\cdots,P_l$ is called the degree-series of the graph G. The set consists of the degrees of other ends of the incidance edges of $x_i(1\leqslant i\leqslant l)$ in graph G, is called the incidence degree-set of x_i. The complexity of graph isomorphism test is proved to be polynomial by calculating and comparing the degree-series, the degrees of the deleted vertexes and their incidence degree-set.

Key words: graph isomorphism, complexity, polynomial, degree-series, degree-set

自文献[1]发表之后,发现图 G 的 VC 表示式,即 $VC(G)$ 并非唯一的.本文证明,即便这样,图同构的复杂性仍然是多项式的.

1 定义及定理

图的同构与其顶点的度数有极大关系.不妨在顶点 V 的右上方标上有括号的数字来表示,如 $V^{(3)}$ 则表示顶点 V 在图 G 中的度数是 3.

定理 1 简单连通图 $G=(V,E)$ 和 $F=(U,W)$ 同构的充要条件是有 VC 算法[1],使得在

$$VC(G)=\left\{\begin{array}{l}V_{x_1^{(n_1)}}^{\{x_{11}^{(n_{11})},x_{12}^{(n_{12})},\cdots,x_{1P_1}^{(n_{1P_1})}\}},V_{x_2^{(n_2)}}^{\{x_{21}^{(n_{21})},x_{22}^{(n_{22})},\cdots,x_{2P_2}^{(n_{2P_2})}\}},\\ \quad\cdots,V_{x_l^{(n_l)}}^{\{x_{l1}^{(n_{l1})},x_{l2}^{(n_{l2})},\cdots,x_{lP_l}^{(n_{lP_l})}\}}\end{array}\right\}$$

与

$$VC(F)=\left\{\begin{array}{l}V_{y_1^{(m_1)}}^{\{y_{11}^{(m_{11})},y_{12}^{(m_{12})},\cdots,y_{1P_1}^{(m_{1P_1})}\}},V_{y_2^{(m_2)}}^{\{y_{21}^{(m_{21})},y_{22}^{(m_{22})},\cdots,y_{2P_2}^{(m_{2P_2})}\}},\\ \quad\cdots,V_{y_l^{(m_l)}}^{\{y_{l1}^{(m_{l1})},y_{l2}^{(m_{l2})},\cdots,y_{lP_l}^{(m_{lP_l})}\}}\end{array}\right\}$$

中,有

$$|\{x_{i1}^{(n_{i1})},x_{i2}^{(n_{i2})},\cdots,x_{iP_i}^{(n_{iP_i})}\}|=|\{y_{i1}^{(m_{i1})},y_{i2}^{(m_{i2})},\cdots,y_{iP_i}^{(m_{iP_i})}\}| \tag{1}$$

且

$$\{n_{i1},n_{i2},\cdots,n_{iP_i}\}=\{m_{i1},m_{i2},\cdots,m_{iP_i}\},n_i=m_i, \tag{2}$$

其中,所有的 $x_i,x_{ij}\in V,y_i,y_{ij}\in U,1\leqslant i\leqslant l,1\leqslant j\leqslant P_i,\sum_{i=1}^{l}P_i=|E|=|W|$.

证明 必要性 设 G 与 F 同构.这时,G 中的顶点必定对应着 F 中度数与之相同的顶点;G 中相邻的两顶点,它们在 F 中的像,仍然相邻(反之亦然).这样,当 G 和 F 执行 VC 算法时,如果 x_i 是 G 中度数最大的顶点,则 x_i 在 F 中的像,比方说是 y_i,也必然是 F 中度数之最大者.因而分别在 G 和 F 中删除 x_i 和 y_i 及其关联的边后,各自所余的子图中的顶

2004-02-15 收稿,2004-05-02 修回。

点，原来度数相等的，依然相等：凡与 x_i 和 y_i 不相邻的，度数不变；凡与之相邻的，度数减 1. 特别，与 x_i 关联的边的另一端点，就是 G 中与 x_i 相邻的顶点；与 y_i 关联的边的另一端点就是 F 中与 y_i 相邻的顶点. 由于 x_i 的像是 y_i，从而与 y_i 关联的边的另一端点就是 x_i 关联的边的另一端点的像. 依前述的同构假设，G 中的顶点，其度数与其在 F 中的像的度数相等. 对后面要删除的顶点及其关联边，依此类推. 因此，对任一 i 和 P_i，$\forall\ n_{ij} \in \{m_{i1}, m_{i2}, \cdots, m_{iP_i}\}$，且 $\forall\ m_{ij} \in \{n_{i1}, n_{i2}, \cdots, n_{iP_i}\}$，$n_i = m_i (i = 1, 2, \cdots, l)$ 此即(2)式.

如上所述，G 中度数是最大的顶点所关联的边数与其在 F 中的象的关联的边数相等，对于 G 与 F 的各次子图[1]，情况类似. 此即(1)式. 必要性得证.

充分性　如果对图 G 和 F 施行 VC 算法后，其 $VC(G)$ 与 $VC(F)$ 有如上式. 那么，构造映射 $f: V \to U$：首先，令 $V_0 = \{x_1, x_2, \cdots, x_l\}$，$U_0 = \{y_1, y_2, \cdots, y_l\}$ 且 $f(x_i) = y_i (i = 1, 2, \cdots, l)$. 其次，对于 $x_{ij} \in (V - V_0) \cap \{x_{i1}^{(n_{i1})}, x_{i2}^{(n_{i2})}, \cdots, x_{iP_i}^{(n_{iP_i})}\}$，则令

$f(x_{ij}) = y_{ij} \in (U - U_0) \cap \{y_{i1}^{(m_{i1})}, y_{i2}^{(m_{i2})}, \cdots, y_{iP_i}^{(m_{iP_i})}\}$，$(\deg(x_{ij}) = \deg(y_{ij}))$. 可验证，这是一个同构映射. 证毕.

在 $VC(G)$ 表示式中，具有相同的关联边数 P_i 的项是可以调换次序的，并且 $V_a^{\{b\}}$ 也可写成 $V_b^{\{a\}}$.

例 1　图 G_1 和图 G_2 分别如图1、图2所示，判断图 G_1 与 G_2 是否同构.

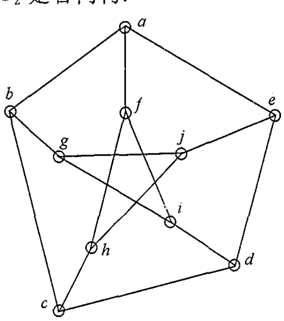

图 1　图 G_1

解　因为

$VC(G_1) = \{V_a^{\{b,f,e\}}, V_d^{\{e,i,c\}}, V_g^{\{b,j,i\}}, V_h^{\{c,f,j\}}, V_b^{\{c\}}, V_i^{\{f\}}, V_e^{\{j\}}\}$，

$VC(G_2) = \{V_{e'}^{\{a',j',d'\}}, V_{i'}^{\{d',g',f'\}}, V_{b'}^{\{a',c',g'\}}, V_{h'}^{\{f',j',c'\}}, V_{a'}^{\{f'\}}, V_{g'}^{\{j'\}}, V_{d'}^{\{c'\}}\}$.

因为 G_1 与 G_2 中的每个顶点的度数均为 3，故省去.

由定理 1 知图 G_1 与 G_2 同构.

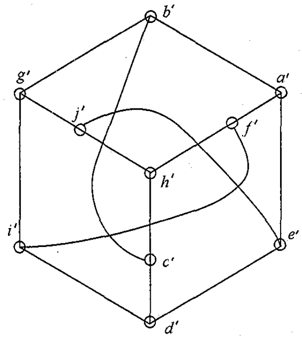

图 2　图 G_2

例 2　图 A、图 B 分别如图 3、图 4 所示，判断图 A 和 B 是否同构.

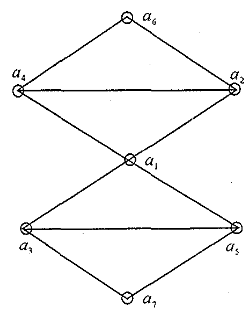

图 3　图 A

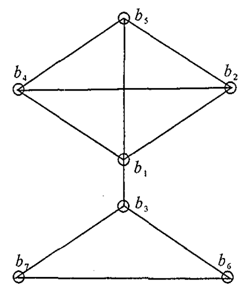

图 4　图 B

解　因为

$$VC(A) = \left\{V_{a_1^{(4)}}^{\{a_2^{(3)}, a_3^{(3)}, a_4^{(3)}, a_5^{(3)}\}}, V_{a_2^{(3)}}^{\{a_6^{(2)}, a_4^{(3)}\}}, V_{a_5^{(3)}}^{\{a_7^{(2)}, a_3^{(3)}\}}, V_{a_4^{(3)}}^{\{a_6^{(2)}\}}, V_{a_3^{(3)}}^{\{a_7^{(2)}\}}\right\},$$

$$VC(B) = \left\{V_{b_1^{(4)}}^{\{b_2^{(3)}, b_3^{(3)}, b_4^{(3)}, a_5^{(3)}\}}, V_{b_5^{(3)}}^{\{b_2^{(3)}, b_4^{(3)}\}}, V_{b_3^{(3)}}^{\{b_7^{(2)}, a_6^{(2)}\}}, V_{b_2^{(3)}}^{\{b_4^{(3)}\}}, V_{b_6^{(2)}}^{\{b_7^{(2)}\}}\right\}.$$

由定理 1，因其不满足(2) 式而不同构.

定义 1　在 $VC(G)$ 中，称 $P_1, P_2, \cdots, P_l$ 为图 G 的度序列. 设图 G 与 G' 的度序列分别为 $P_1, P_2, \cdots, P_l$ 和 $P'_1, P'_2, \cdots, P'_{l'} (l = l')$，如果对 $k = 1, 2, \cdots, l$，分

别有 $P_k=P'_k$,则说 G 和 G' 有相同的度序列.

定义2 在 $VC(G)$ 中,称 $\{n_{i1},n_{i2},\cdots,n_{iP_i}\}(i=1,2,\cdots,l)$ 为顶点 $x_i\in V$ 关联的度集合.

有时,需要把图 G 的度序列 $P_1,P_2,\cdots,P_l$ 与整数对应:

$$f(P_1,P_2,\cdots,P_l)=P_1\times n_0^{l-1}+P_2\times n_0^{l-2}+\cdots+P_l\times n_0^0,$$

其中,n_0 可取 $\max\limits_{V_i\in V}(\deg(V_i))+1$,在 $\max\limits_{V_i\in V}(\deg(V_i))<10$ 时,也可取 10.

关于图 G 的度序列,有如下定理:

定理2 无向简单连通图 $G=(V,E)$ 有 2 个不同的度序列的充要条件是它的某次子图中有 $S(\geqslant 3)$ 个同为度数最大的顶点,其中 2 个顶点不相邻,另外有一个和所有其余的顶点都相邻.

证明 首先,如果图 G 的每次子图都只有一个度数最大的顶点,这时删除这些顶点的次序是唯一的,从而其度序列也唯一.

其次,如果图 G 的每次子图都只有 2 个度数最大的顶点,比如在某次子图中有最大度数为 n_0 的顶点 x_1 和 x_2. 此时,倘若它们相邻,则无论按先 x_1 后 x_2,还是先 x_2 后 x_1 去删除,相应度数都是 n_0,n_0-1;倘若它们不相邻,则无论按何种顺序删除,相应度数都是 n_0,n_0. 因而,此种情况下,其度序列也是唯一的.

下面,假设图 G 的某次子图中有 $S(\geqslant 3)$ 个度数同为最大的顶点.

充分性 此时有 2 种删除次序:a、先后删除那两个不相邻的顶点,相应度数为 n_0,n_0;b、先删除那个与其他的顶点都相邻的顶点,再删除余下之一顶点,相应度数则为 n_0,n_0-1. 因此就有 2 个不同的度序列.

必要性 设图 G 有 2 个不同的度序列,那么,他们最少有一个项(度数)不相同. 例如 $n_1,n_2,\cdots,n_k,n_{k+1},\cdots$,和 $n_1,n_2,\cdots,n_k,n'_{k+1}\cdots$ 其中的 $n_{k+1}\neq n'_{k+1}$. 现在,考察最大度数为 n_k 的顶点所在的子图. 基于前述理由,该子图必有 $S(\geqslant 3)$ 个度数同为 n_k 的顶点. 由 VC 算法,当在该子图中删除这 S 个顶点之一之后,其余顶点的度数或是不变或是少 1. 因而,下一次要删除的顶点的度数要么依然是 n_k,要么是 n_k-1. 倘是前者,说明这 S 个顶点中必有两个是不相邻的;倘是后者,说明删除的那个顶点与其余的 $S-1$ 个顶点都相邻. 既是 $n_{k+1}\neq n'_{k+1}$,说明两者同时并存. 定理得证.

定理3 任意一个无向简单连通图 $G=(V,E)$ 的度序列的个数 $q\leqslant 2+(l-3)$,其中 $l=\max\{|VC(G)|\}$,即其度序列中的最大项数. 此时若有项数仅为 $l-1$ 的度序列,则补上 0 作为其最后一项.

证明 (Ⅰ)当 $l=3$ 时,可满足定理 2 的条件,因而由定理 2 图 $G=(V,E)$ 有分别为 n_0,n_0,n_1 和 n_0,n_0-1,n_2 两个度序列. 但 $n_0+n_0+n_1=n_0+(n_0-1)+n_2=|E|$,所以 $n_1=n_2-1$. 从而,不可能有其它的度序列,即 $q=2+(l-3)$;

(Ⅱ)设 $l=k$ 时定理已成立,即 $q_k=2+(k-3)$,推证 $l=k+1$ 时定理 3 也成立. $l=k$ 到 $l=k+1$,相应地,其 k 次子图到 $k+1$ 次子图,由定理 2 的证明过程知其度序列的个数最多增 1:$q_{k+1}\leqslant q_k+1=2+(k-3)+1=2+(k+1-3)=2+(l-3)$. 因而 $l=k+1$ 时定理 3 也成立,证毕.

例3 如图 5,依次按 $V_1-V_5-V_2-V_3,V_3-V_1-V_5-V_2,V_3-V_2-V_1-V_5$ 和 $V_3-V_2-V_4-V_5-V_1$ 删除各顶点及其相关联的边,则分别得到度序列 44210,43310,43220 和 43211.

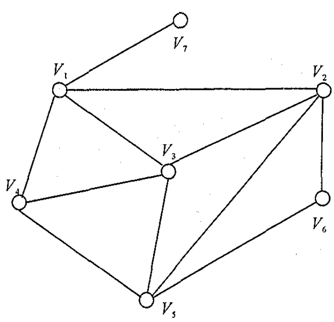

图5 图的度序列

2 判定图 G 与 F 同构的算法

输入 $G(F)$ 的邻接矩阵 $A(i,j)(C(i,j))$;

输出 G 与 F 同构或不同构的结果;

begin

$q\leftarrow 1$;记 $A(i,j)$ 为 $B(q,i,j)$;

for $y=1$ step 1 until q do

begin

222:求 $B(y,i,j)$ 各行中 1 的个数(即 G 或其余子图各顶点的度数;$d(i)$);

求与 $B(y,i,j)$ 相应的 G 的子图的最大度数的顶点(k)及最大度数的顶点数(S);

如果 $S\geqslant 3$ 且其中有两不相邻的顶点(记其中之一为 k_1),另有一顶点 k_2 与其余的 $S-1$ 个顶点均

相邻，则

（Ⅰ）$q \leftarrow q+1$；$B(q,i,j) \leftarrow B(y,i,j)$；消去 $B(q,i,j)$ 中第 k_1 行的所有 1，计算度序列 $g(q) \leftarrow g(q) \times n_0 + d(k_1)$；累计删除的边数 $m(q) \leftarrow m(q) + d(k_1)$；

（Ⅱ）消去 $B(y,i,j)$ 中第 k_2 行的所有的 1；计算 $g(y) \leftarrow g(y) \times n_0 + d(k_2)$；累加删除的边数 $m(y) \leftarrow m(y) + d(k_2)$；

否则消去 $B(y,i,j)$ 中第 k 行的所有的 1；

$g(y) \leftarrow g(y) \times n_0 + d(k)$；

$m(y) \leftarrow m(y) + d(k)$；

如果 $m \neq m(y)$ 则转 222；输出 $g(y)(f(y))$

end；

注：$m = |E|$.

比较 G 和 F 的度序列 $g(1),g(2),\cdots,g(q)$ 与 $f(1),f(2),\cdots,f(q)$，如果有相同者则转 333，否则打印"G 与 F 不同构"而结束；

333：对 $i=1,2,\cdots,l$，而 $j=1,2,\cdots,P_i$，如果 $(n_i = m_i) \wedge \forall\, n_{ij} \in \{m_{i1},m_{i2},\cdots,m_{iP_i}\} \wedge \forall\, m_{ij} \in \{n_{i1},n_{i2},\cdots,n_{iP_i}\}$，则打印"$G$ 与 F 同构"，否则打印"G 与 F 不同构"

end

3 算法分析

（Ⅰ）求图的度序列的所需时间：

(a) 求各顶点的度数及其顶点的最大度数，求最大度数的顶点数为 $n \times n + n + n = 0(n^2)$；

注：$n = |V|$.

(b) 在 S 个顶点中寻与其余 $S-1$ 个顶点皆相邻的顶点以及不相邻的顶点为 $S \times S + (S-1) \times (S-1-i) < S \times S + S \times S < n \times n + n \times n = O(n^2)$；

(c) 转换数组，删除 ② 中所寻的顶点及其关联的边为 $n^2 + n + n = O(n^2)$；

以上各步最多循环 $q(<l<n)$ 次，每次执行 GOTO 222 不超过 l 次，其时间为 $O(n^4)$；

（Ⅱ）比较两图的度序列所需时间为 $q \times q \leqslant n \times n = O(n^2)$；

（Ⅲ）由于 $l < n$ 且 $n > n-1 \geqslant P_1 \geqslant P_2 \geqslant \cdots \geqslant P_l$，检查各次顶点的度及其关联的度集合所需时间为 $O(n^2)$.

因此，判定图 G 与图 F 同构所需时间为

$$O(n^4) + O(n^4) + O(n^2) + O(n^2) = O(n^4).$$

参考文献：

1 罗示丰. 两图同构的判别准则及其复杂性. 计算机科学，1997，(10)：148～153.

2 加里 M B，约翰逊 D S. 计算机和难解性. 张立昂译. 北京：科学出版社，1987.

3 华南工学院高等数学教研室，电子计算机软件教研组编. 电子计算机与算法语言. 北京：人民教育出版社，1978. 13～165.

（责任编辑：黎贞崇）

（上接第 128 页）

由定理，命题成立. 证毕.

参考文献：

1 陈景良，陈向辉. 特殊矩阵. 北京：清华大学出版社，2001. 165.

2 李大林. 利用固定矩阵计算亏损矩阵的幂级数之和. 广西科学，2003，10(4)：285～261.

3 李德光. 求 n 阶 m 次方幂的一个公式. 湘潭矿业学院学报，1994，9(4)：80～81.

4 陈祖明，周家胜. 矩阵论引论. 北京：北京航空航天大学出版社，1998. 333～338.

（责任编辑：黎贞崇）