用任意次函数拟合需求变化存贮模型的最优解

Optimization Solution of a Kind of Inventory Model with Cycle Changes by Using Free Degree Function

刘建平[1],韩　松[2]

Liu Jianping[1], Han Song[2]

(1. 广西大学数学与信息科学学院,广西南宁　530004;
2. 广西工学院信息与计算科学系,广西柳州　545006)

(1. Coll. of Math. & Info. Sci., Guangxi University, Nanning, Guangxi, 530004, China; 2. Dept. of Information & Computing Science, Guangxi University of Technology, Liuzhou, Guangxi, 545006, China)

摘要:讨论一类推广的需求率曲线为具有双拐点类型任意次函数的存贮模型,运用间接法给出该模型的解析最优解.其最优解为库存应用中需求率曲线的拟合提供更多的选择方式。

关键词:存贮模型　需求率　最优解　任意次函数

中图法分类号:O227

Abstract: The inventory model of free degree function with a generalized demand rate curve containing two inflexions is discussed. The optimization solution of this model is obtained by the indirect method. The optimization solution provides more choices to the imitating of demand rate curve of inventory applications.

Key words: inventory model, demand rate, optimization solution, free degree function

对于需求率随时间 t 变化的库存模型来说,拟合需求率曲线是非常重要的.对于一种产品由非零需求逐渐变化至零的情形,文献[1]给出了线性需求的最优控制模型;而对于需求由零至峰值再回复到零的情形,文献[2]给出一种用简单直线段拟合需求函数 $\lambda(t)=at^me^{bt}$(其中 a,m,b 为参数)的库存模型,文献[3,4]则分别给出二、三次函数来拟合该情形的库存模型,而文献[5]在文献[1～4]的基础上给出推广的用任意次($m+1$ 次,$m=1,2,\cdots$)函数 $\lambda(t)=Kt(T-t)^m$(该曲线仅有一个拐点)来近似拟合该情形时的库存模型,得出了它的最优控制策略.

本文在文献[1～5]的基础之上给出一个需求率曲线具有双拐点的推广模型,其需求率为时间 t 的 $m+2$ 次函数 $\lambda(t)=Kt^2(T-t)^m$(其中系数 $K>0$;周期 $T>0$;$0\leqslant t\leqslant T$;$m=0,1,2,\cdots$,其中 $m\geqslant 2$ 时具有双拐点,且拐点为 $(t_1,\lambda(t_1))$ 及 $(t_2,\lambda(t_2))$,其中 $t_{1,2}=\dfrac{2(m+1)\pm\sqrt{2m(m+1)}}{(m+1)(m+2)}T$,峰值为 $\lambda(\dfrac{2T}{m+2})=\dfrac{4Km^mT^m}{(m+2)^{m+2}}$),并用间接法得出该模型的解析最优解.该模型的最优解提供了应用中进行拟合的可选择的又一种方式,同时由于给出了解析公式解,使计算方便、快捷.

2002-12-04 收稿,2003-09-24 修回。

1　需求率变化的库存模型

设需求率 $\lambda(t)$ 为时间 t 的 $m+2$ 次函数:

$$\lambda(t)=Kt^2(T-t)^m,(0\leqslant t\leqslant T,m=0,1,2,\cdots),\tag{1}$$

式中,常数 $K>0$,而 T 为寿命周期,当 m 取不同值时,所得需求率函数 $\lambda(t)$ 也不一样。当 $m=0$ 时需求率函数为抛物线,需求率 $\lambda(t)$ 由 0 增加到 KT^2;当 $m\geqslant 1$ 时,需求由零至峰值再回复到零,并且当 $m\geqslant 2$ 时需求率函数均为具有双拐点的曲线弧.又设订购一次的订购费为 C,单位时间内单位货物的存贮费为 H,备运期可忽略不计,且不允许缺货,则该模型的最优控制策略应为:求在时间 $[0,T]$ 内订购次数 n 为多少,每次订货时间 $t_1,t_2,\cdots\cdots,t_n$ 如何确定,每次的进货量 $q_1,q_2,\cdots\cdots,q_n$ 是多少,并能使总费用(订购费和存贮费之和)为最少.

2　模型的最优解

下面用间接法来求解该模型的最优解．令

$$\mu(t)=\lambda(T-t)=K(T-t)^2t^m,(0\leqslant t\leqslant T,m=0,1,\cdots),\qquad(2)$$

对 $\mu(t)$ 而言，此时其周期开始时刻为 T，而结束时刻为 0.

假设 y 表示一段时间的起始时刻，x 表示任意时刻．若在时段 $[y,x]$ 内不订购，则时刻 x 的库存量为：$\varphi(x)=\int_y^x\mu(t)\mathrm{d}t$. 设 $y\leqslant x\leqslant t$ 时间内的库存量为 $i(t,y)$，则：

$$i(t,y)=\int_y^t\varphi(x)\mathrm{d}x=\int_y^t\mathrm{d}x\int_y^x\mu(t)\mathrm{d}t,\qquad(3)$$

又设 $y\leqslant x\leqslant t$ 时间内的存贮费为 $I(t,y)$，则：

$$I(t,y)=Hi(t,y)=HK[\frac{T^2t^{m+2}}{(m+1)(m+2)}+\frac{T^2y^{m+2}}{m+2}-\frac{T^2ty^{m+1}}{m+1}+\frac{2Tty^{m+2}}{m+2}-\frac{2Ty^{m+3}}{m+3}-\frac{2Tt^{m+3}}{(m+2)(m+3)}+\frac{t^{m+4}}{(m+3)(m+4)}+\frac{y^{m+4}}{m+4}-\frac{ty^{m+3}}{m+3}],\qquad(4)$$

令 $f_n(T)$ 表示在时间 T 内订购 n 次的最小总费用，则有如下函数方程：

$$\begin{cases}f_1(T)=C+I(T,0),\\ f_{n+1}(T)=\min\limits_{0<y<T}\{C+I(T,y)+f_n(y)\},\end{cases}\qquad(5)$$

由(4)及(5)的第一式有：

$$f_1(T)=C+I(T,0)=C+\frac{6}{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)}HKT^{m+4},\qquad(6)$$

一般地可令[1]

$$f_n(T)=nC+a_nHKT^{m+4}.\qquad(7)$$

下面确定待定系数 a_{n+1}. 由(5)的第二式有：

$$f_{n+1}(T)=\min_{0<y<T}\{C+I(T,y)+nC+a_nHKy^{m+4}\}=(n+1)C+HK\min_{0<y<T}\{\frac{6T^{m+4}}{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)}+\frac{3T^2y^{m+2}}{m+2}-\frac{T^3y^{m+1}}{m+1}-\frac{3Ty^{m+3}}{m+3}+(\frac{1}{m+4}+a_n)y^{m+4}\},\qquad(8)$$

令 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\{\frac{6T^{m+4}}{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)}+\frac{3T^2y^{m+2}}{m+2}-\frac{T^3y^{m+1}}{m+1}-\frac{3Ty^{m+3}}{m+3}+(\frac{1}{m+4}+a_n)y^{m+4}\}=0$，解得符合条件的极小点

$$y=\frac{1}{1+\sqrt[3]{(m+4)a_n}}T,\qquad(9)$$

将(9)式代入(8)式解得：

$$f_{n+1}(T)=(n+1)C+a_1\cdot[1-(2+2(m+3)\sqrt[3]{(m+4)a_n}+(m+2)(m+3)\sqrt[3]{(m+4)^2a_n^2})/2[1+\sqrt[3]{(m+4)a_n}]^{m+3}]HKT^{m+4},\qquad(10)$$

式中，a_1 就是(6)式中 HKT^{m+4} 的系数，也即 $a_1=\frac{6}{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)}$，故比较(6)、(7)及(10)式可知待定系数 a_{n+1} 的递推公式为：

$$\begin{cases}a_1=\frac{6}{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)},\\ a_{n+1}=\frac{6}{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)}\cdot\\ \quad[1-(2+2(m+3)\sqrt[3]{(m+4)a_n}+(m+2)(m+3)\sqrt[3]{(m+4)^2a_n^2})/2[1+\sqrt[3]{(m+4)a_n}]^{m+3}],\end{cases}\qquad(11)$$

要求 n 的值，则要求使得不等式 $f_n(T)\leqslant f_{n+1}(T)$ 成立的最小整数 n，即有：

$$nC+a_nHKT^{m+4}\leqslant(n+1)C+a_{n+1}HKT^{m+4},$$

上式化简得：

$$a_n-a_{n+1}\leqslant\frac{C}{HKT^{m+4}},\qquad(12)$$

由(11)式容易知道 $\{a_{n+1}\}$ 为单调递减且极限为零的序列，而 C、H、K、T 均为常数，故由(12)式可列式求出使得总费用为最小的正整数 n(即最小的订购次数)的值．

其次，第(9)式表示在时间 $[0,y]$ 内已经订购了 n 次，而第 $n+1$ 次的订购时间为 y. 一般地，第 $i+1$ 次的订购时间由下式给出：

$$t_{i+1}=T-y_{n+1-i},(i=0,1,2,\cdots,n-1),\qquad(13)$$

式中，

$$y_{n+1}=T\text{ 且 }y_{i+1}=\frac{1}{1+\sqrt[3]{(m+4)a_i}}y_{i+2},(i=n-1,n-2,\cdots,2,1).\qquad(14)$$

另外，第 $i+1$ 次的订购量 q_{i+1} 应满足第 $i+1$ 次与第 $i+2$ 次之间的需求量，因而有

$$q_{i+1}=\int_{t_{i+1}}^{t_{i+2}}\lambda(t)\mathrm{d}t=K\int_{t_{i+1}}^{t_{i+2}}t^2(T-t)^m\mathrm{d}t,(i=n-1,n-2,\cdots,1,0).\qquad(15)$$

最后给出订购次数为 n 次的最小总费用：

$$f_n(T)=nC+a_nHKT^{m+4}.\qquad(16)$$

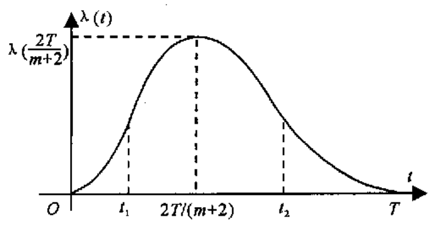

图 1　具有双拐点存贮模型

3　实例

例 1　假定某产品 1a 的需求率曲线为 L(经验曲线)，我们可用四次曲线 l：$\lambda(t) = Kt^2(T-t)^2$($m=2$) 来近似拟合，L 及 l 的图形如图 2 所示，其中 $T=12$，一次产品订购费 $C=450$ 元，单位产品存贮费 $H=0.05$，初始库存量为 0，$K=1.5$(调整值)，T 及 t 的单位均为月。问 1a 应进几次货，每次进货时间及进货数量是多少，才能使总费用最小.

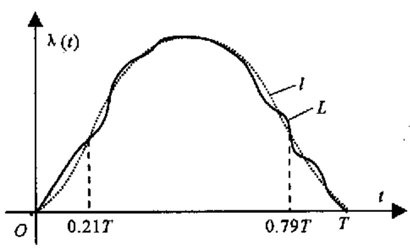

图 2　需求率曲线拟合

解　(i) 先求订购次数 n，因为

$$\frac{C}{HKT^{m+4}} = \frac{450}{0.05\times1.5\times12^{2+4}} = 0.002009,$$

由(11) 及(12) 式有

$a_1 = 0.0166667$，$a_2 = 0.0031057$，$a_3 = 0.0010923$，$a_4 = 0.0005080$，而 $a_1 - a_2 = 0.013561 > 0.002009$，$a_2 - a_3 = 0.0020134 > 0.002009$，$a_3 - a_4 = 0.0005843 < 0.002009$，故 $n=3$，即 1 a 内订购 3 次.

(ii) 其次订购时间：由(13) 及(14) 式可得订购时间如下：$t_1 = 0$(即年初)，$t_2 = 2.52$(月)(约合 75 d)，$t_3 = 5.52$(月)(约合 165 d).

(iii) 再次，由(15) 式求每次的订购量：第一次的订购量应满足 2.52 月的需求量，也即：

$q_1 = 1.5\int_0^{2.52} t^2(12-t)^2\mathrm{d}t = 819.76$；类似地，第二次、第三次订购量为 $q_2 = 4471.90$ 及 $q_3 = 12441.60$。

(iv) 最小总费用为：$f_3(T) = 3C + a_3HKT^6 = 3\times450 + 0.0010923\times0.05\times1.5\times12^6 = 1594.62$(元)，其库存与订货情况如图 3 所示.

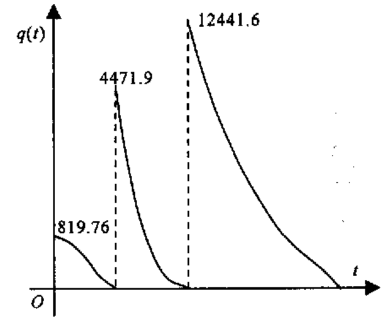

图 3　订购量及订购时间

4　结束语

容易知道，当 m 取不同的自然数，取不同实数时，就可以得到不同次数(不同类型)的需求率函数，这使得我们对需求率函数有了更多的选择．由于该模型与文献[1～5]的类型完全不同，这弥补了需求率曲线较为单一的不足，需求率函数的选择就增加了一种方式，另外由于该模型的普遍性（即 K 与 m 选择的多样性），以及求出了解析公式，故在应用中具有较重要的理论与现实意义.

参考文献：

1　黄洁纲. 存贮论原理及其应用. 上海：上海科学技术文献出版社，1984.

2　Ritchie E. Practical inventory replenishment policies for a linear trend demand. J of Operational Research Society，1980.

3　韩　松. 用二次函数拟合产品寿命周期存贮模型的最优解. 广西工学院学报，2001，12(2)：20～22，34.

4　陈　学. 需求率符合产品寿命周期的库存问题的最优控制. 系统工程理论与实践，1997，17(4)：65～68.

5　韩　松. 一类需求符合产品寿命周期存贮模型的最优解. 系统工程，2001，19(4)：40～42.

(责任编辑：黎贞崇)