基于当前价格的风险收益证券组合投资策略
Portfolio Investment Strategy Based on Profits at Risk of Present Price

林孝贵
Lin Xiaogui

（广西工学院管理工程系　柳州　545006）
(Dept. of Management Eng., Guangxi Institute of Tech., Liuzhou, 545006)

摘要　基于当前价格和风险收益的证券组合策略不仅考虑基于当前价格的风险，而且考虑风险与收益的关系。这一策略通过使风险收益尽可能大来解出证券组合比例，并证明所求的证券组合比例具有较好的性质，改善了传统的证券组合策略的效果。该策略还为判断当前价格是适合买入还是适合卖出提供理论基础。

关键词　当前价格　证券组合投资　证券组合比例　风险收益
中图法分类号　O212.4；F83

Abstract　The portfolio investment strategy based on the present price and profits at risk considered not only the risks based on the present price, but also the relation between risk and profit. It obtained the ratios of portfolio by maximizing the profits at risk. The ratios of portfolio obtained have good qualities. The effect of traditional portfolio strategy is improved. This strategy could give some ideas for buying and selling at the present price.

Key words　present price, portfolio investment, portfolio ratio, profits at risk

在证券组合选择理论中，Markowitz[1,2]提出了均值-方差方法（MV 模型），这一模型已被广泛地接受作为证券组合优化的工具。它是以随机收益的均值作为投资者的收益，随机收益的方差作为投资者的风险。均值-方差方法是通过在给定收益的条件下，使风险达最小；或者在给定风险的条件下，使收益达最大来求出投资比例的。但是，在实际证券交易中，证券交易分买进和卖出 2 种情况，我们把买进一个证券组合称为多头证券组合，把卖出一个证券组合称为空头证券组合。投资者在不同的当前价格（目前价格）买进或卖出证券组合，他的收益和风险是不同的。因此，基于当前的价格是适合买进还是适合卖出，各类证券所交易的比例是多少等等问题都值得我们去探讨。本文就是根据当前的价格分析买进、卖出一个证券组合的收益和风险度量的问题，并且使基于单位风险所获得的收益（单位风险收益）达最大作为目标来研究证券组合投资的比例，以及所得到投资比例的优良性。

所谓一个证券投资组合，就是进行投资的 n 种证券。任给定某个时期（交易日），设第 i 种证

2003-02-24 收稿。

券的期初($t=0$)价格为S_{i0},期末($t=T$)价格为S_i,则从$t=0$到$t=T$这一时期的对数收益率(简称为收益)为$r_i=\ln\frac{S_i}{S_{i0}}, i=1,2,\cdots,n$, $\boldsymbol{R}=(r_1,r_2,\cdots,r_n)^T$是证券组合在这一时期的收益向量。我们称投资者在期初时买卖证券的价格$S_{10},S_{20},\cdots,S_{n0}$为证券组合的当前价格。这些当前价格是常量,而期末价格$S_1,S_2,\cdots,S_n$是随机变量,因而$\boldsymbol{R}$是一个n维随机向量,用符号表示它的期望和方差如下

$$\begin{cases}\mathrm{E}\boldsymbol{R}=(\mathrm{E}r_1,\cdots,\mathrm{E}r_n)^T=(\mathrm{E}\ln S_1-\ln S_{10},\cdots,E\ln S_n-\ln S_{n0})^T\\ \qquad=(\mu_1-\ln S_{10},\cdots,\mu_n-\ln S_{n0})^T=\mu,\\ \mathrm{Var}(\boldsymbol{R})=\mathrm{E}(\boldsymbol{R}-\mathrm{E}\boldsymbol{R})(\boldsymbol{R}-\mathrm{E}\boldsymbol{R})^T=\Sigma,\end{cases}\tag{1}$$

设在第i种证券上的投资比例为$x_i, i=1,2,\cdots,n$,记

$$\underset{n\times1}{\boldsymbol{X}}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T,\ \underset{n\times1}{\boldsymbol{e}}=(1,\cdots,1)^T,$$

我们约定投资比例满足约束条件$x_i>0, i=1,2,\cdots,n$,且$\sum_{i=1}^{n}x_i=1$,即$\boldsymbol{X}\geqslant0, \boldsymbol{X}^T\boldsymbol{e}=1$。在多头证券组合中出现某个$x_j<0$,表示第$j$种证券是卖出的;在空头证券组合中出现某个$x_j<0$,表示第$j$种证券是买入的。这样约定后,从$t=0$到$t=T$这段时间的多头、空头投资收益可以分别表示为

$$\xi=\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{R}, -\xi=-\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{R},$$

它们的期望和方差分别为

$$\begin{cases}\mathrm{E}\zeta=\boldsymbol{X}^T\mu,\\ \mathrm{Var}(\zeta)=\boldsymbol{X}^T\Sigma\boldsymbol{X};\end{cases}\tag{2}$$

$$\begin{cases}\mathrm{E}(-\zeta)=-\boldsymbol{X}^T\mu,\\ \mathrm{Var}(-\zeta)=\boldsymbol{X}^T\Sigma\boldsymbol{X}.\end{cases}\tag{3}$$

1 基于当前价格的证券组合风险的度量

在前面的记号下,在$t=0$时的收益记为$\zeta_0=0$,由于在$t=T$时收益ζ是一个随机变量,它围绕着$\zeta_0=0$随机波动。所以在当前价格$S_{10},S_{20},\cdots,S_{n0}$交易证券组合,到$t=T$时的收益$\zeta$的风险来自$\zeta$偏离$\zeta_0=0$的程度。因此,我们可以用$\zeta-\zeta_0$的二阶矩$\mathrm{E}(\zeta-\zeta_0)^2$来度量这种风险。它包含了多、空2种情况的风险,若$\zeta\geqslant\zeta_0=0$,则表明多头证券组合收益是盈利的,而空头证券组合收益是亏损的;所以,对多头证券组合来说就不存在风险,而对空头证券组合就存在风险。相反地,若$\zeta<\zeta_0=0$,则表明多头证券组合收益是亏损的,而空头证券组合收益是盈利的;所以,对多头证券组合来说存在风险,而对空头证券组合则不存在风险。由此,我们引入下面定义.

定义1 记$\zeta=\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{R}$,当前价格为$S_{10},\cdots,S_{n0}$则

1)称$\mathrm{E}(\zeta^2)$为相应于当前价格的证券组合总风险,记为$V(S_{10},\cdots,S_{n0})$;

2)称$\mathrm{E}(\zeta^2|\zeta\geqslant0)P(\zeta\geqslant0)$为相应于当前价格的空头证券组合风险,记为$V(S_{10},\cdots,S_{n0}|\zeta\geqslant0)$.

3)称$\mathrm{E}(\zeta^2|\zeta<0)P(\zeta<0)$为相应于当前价格的多头证券组合风险,记为$V(S_{10},\cdots,S_{n0}|\zeta<0)$.

由全数学期望公式得到总风险分解公式

$$V(S_{10},\cdots,S_{n0})=V(S_{10},\cdots,S_{n0}|\zeta\geqslant0)+V(S_{10},\cdots,S_{n0}|\zeta<0),$$

使用(1)、(2)式的记号可以把总风险表示为

$$V(S_{10},\cdots,S_{n0})=\mathrm{E}\zeta^2=\mathrm{E}(\zeta-\mathrm{E}\zeta+\mathrm{E}\zeta)^2=\mathrm{Var}(\zeta)+(\mathrm{E}\zeta)^2=\boldsymbol{X}^T(\Sigma+\mu\mu^T)\boldsymbol{X}. \tag{4}$$

2 基于风险收益的证券组合比例

在传统的证券组合策略[3]中，证券组合收益和风险分别是 $\mathrm{E}\zeta=\boldsymbol{X}^T\mu$，$\mathrm{Var}(\zeta)=\boldsymbol{X}^T\Sigma\boldsymbol{X}$。通过求解下列 2 个等价问题来确定投资比例 $\boldsymbol{X}$。

1)指定 $\boldsymbol{X}^T\mu=a$，求使 $\boldsymbol{X}^T\Sigma\boldsymbol{X}$ 达到最小的 $\boldsymbol{X}$；

2)指定 $\boldsymbol{X}^T\Sigma\boldsymbol{X}=\sigma_c$，求使 $\boldsymbol{X}^T\mu$ 达最大的 $\boldsymbol{X}$。

如果我们希望收益尽可能大，而风险尽可能小这两个因素同时考虑，这可以通过每单位风险所获得的收益(单位风险收益)达到最大来实现。为了计算方便，在这里我们使用(4)式的总风险 $V(S_{10},\cdots,S_{n0})$。由(2)式和(3)式，多头、空头证券组合的期望收益分别是 $\boldsymbol{X}^T\mu$，$-\boldsymbol{X}^T\mu$，所以多头、空头证券组合的比例分别由下面 2 个模型解出

$$(\mathrm{M}_1)\max\frac{\boldsymbol{X}^T\mu}{\sqrt{\boldsymbol{X}^T(\Sigma+\mu\mu^T)\boldsymbol{X}}},\quad(\mathrm{M}_2)\max\frac{-\boldsymbol{X}^T\mu}{\sqrt{\boldsymbol{X}^T(\Sigma+\mu\mu^T)\boldsymbol{X}}},$$

$$\begin{cases}\boldsymbol{X}^T\mu>0,\\ \boldsymbol{X}^T\boldsymbol{e}=1,\end{cases}\qquad\begin{cases}-\boldsymbol{X}^T\mu>0,\\ \boldsymbol{X}^T\boldsymbol{e}=1,\end{cases}$$

(M_1)和(M_2)的解可以在下面(M_3)的解中找到，

$$(\mathrm{M}_3)\max_{X}\frac{(\boldsymbol{X}^T\mu)^2}{\boldsymbol{X}^T(\Sigma+\mu\mu^T)\boldsymbol{X}},$$

由文献[4]，模型(M_3)的全部解是

$$\boldsymbol{X}=a(\Sigma+\mu\mu^T)^{-1}\mu, \tag{5}$$

其中 a 是待定参数，把(5)式分别代入(M_1)，(M_2)的约束条件，就得到(M_1)，(M_2)的解分别是

$$\begin{cases}\boldsymbol{X}_1=(\Sigma+\mu\mu^T)^{-1}\mu/\boldsymbol{e}^T(\Sigma+\mu\mu^T)^{-1}\mu,\\ \boldsymbol{e}^T(\Sigma+\mu\mu^T)^{-1}\mu>0,\end{cases} \tag{6}$$

$$\begin{cases}\boldsymbol{X}_2=(\Sigma+\mu\mu^T)^{-1}\mu/\boldsymbol{e}^T(\Sigma+\mu\mu^T)^{-1}\mu,\\ \boldsymbol{e}^T(\Sigma+\mu\mu^T)^{-1}\mu<0,\end{cases} \tag{7}$$

由于[5]

$$(\Sigma+\mu\mu^T)^{-1}=\Sigma^{-1}-\Sigma^{-1}\mu\mu^T\Sigma^{-1}/(1+\mu^T\Sigma^{-1}\mu), \tag{8}$$

把(8)式分别代入(6)、(7)式化简就得到所要求的多头、空头证券组合比例。我们把所得结果归结为下面命题 1。

命题 1　如果在当前价格 $S_{10},\cdots,S_{n0}$进行证券交易，则使单位风险收益达最大的证券组合比例如下：

1)多头证券组合比例是((M_1)的最优解)

$$\begin{cases}\boldsymbol{X}_1=\Sigma^{-1}\mu/\boldsymbol{e}^T\Sigma^{-1}\mu,\\ \boldsymbol{e}^T\Sigma^{-1}\mu>0;\end{cases} \tag{9}$$

2)空头证券组合比例是((M_2)的最优解)

$$\begin{cases}\boldsymbol{X}_2=\Sigma^{-1}\mu/\boldsymbol{e}^T\Sigma^{-1}\mu,\\ \boldsymbol{e}^T\Sigma^{-1}\mu<0.\end{cases} \tag{10}$$

实际上，(9)式和(10)式中的不等式分别是多头、空头证券组合的必要条件，所以有

命题 2　如果在当前价格 $S_{10},\cdots,S_{n0}$入市进行证券交易，记 $\lambda=\boldsymbol{e}^T\Sigma^{-1}\mu$，则在风险收益最大

的意义下有

1)进行多头证券组合交易的必要条件是 $\lambda>0$；

2)进行空头证券组合交易的必要条件是 $\lambda<0$.

由于 $\mu=(\mathrm{E}\ln S_1-\ln S_{10},\cdots,\mathrm{E}\ln S_n-\ln S_{n0})^T$，命题2表明，在进行多头证券组合交易时，必须选择当前价格 $S_{10},\cdots,S_{n0}$ 尽可能小，至少使 $\lambda>0$ 时入市；而在进行空头证券组合交易时，必须选择当前价格 $S_{10},\cdots,S_{n0}$ 尽可能大，至少使 $\lambda<0$ 时入市。用类似于求解(M_1)，(M_2)的方法得到(9)式和(10)式也恰好是下面命题3模型(M_4)、(M_5)的解。

命题3 设 X_1,X_2 分别由(9)、(10)式给出，则 X_1,X_2 分别是下面2个模型的最优解

$$(\mathrm{M}_4)\max\frac{X^T\mu}{\sqrt{X^T\Sigma X}},\quad(\mathrm{M}_5)\max\frac{-X^T\mu}{\sqrt{X^T\Sigma X}}.$$

$$\begin{cases}X^T\mu>0,\\X^Te=1;\end{cases}\qquad\begin{cases}X^T\mu<0,\\X^Te=1.\end{cases}$$

3 基于风险收益的证券组合比例的优良性

为了便于观察在上段中所导出的 X_1,X_2 的优良性，我们假设 $\zeta=X^TR$ 服从正态分布，即假设 $\zeta\sim N(X^T\mu,X^T\Sigma X)$。由此得到下面2个命题。

命题4 设 X_1,X_2 分别是由(9)、(10)式给出的多头、空头证券组合比例，且设 $\zeta=X^TR\sim N(X^T\mu,X^T\Sigma X)$。则

1)X_1 使多头证券组合风险 $V(S_{10},\cdots,S_{n0}|\zeta<0)$ 达到最小值；

2)X_2 使空头证券组合风险 $V(S_{10},\cdots,S_{n0}|\zeta\geqslant0)$ 达到最小值。

证明 设 $P(x)$ 是 $\zeta=X^TR$ 的概率密度函数，$\varphi(x)$ 是标准正态分布密度函数

$$1)V(S_{10},\cdots,S_{n0}|\zeta<0)=\mathrm{E}(\zeta^2|\zeta<0)P(\zeta<0)=\int_{-\infty}^{0}x^2P(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{-d_1}x^2\varphi(x)\mathrm{d}x,$$

其中 $d_1=X^T\mu/\sqrt{X^T\Sigma X}$，$X$ 满足 $X^Te=1$，d_1 的最大值在 $X^T\mu>0,X^Te=1$ 中取得。由命题3，X_1 是模型(M_4)的最优解，即 d_1 在 X_1 处取得最大值，所以 $V(s_{10},\cdots,s_{n0}|\zeta<0)$ 在 X_1 处取得最小值。

$$2)V(S_{10},\cdots,S_{n0}|\zeta\geqslant0)=\mathrm{E}(\zeta^2|\zeta\geqslant0)P(\zeta\geqslant0)=\int_{0}^{+\infty}x^2P(x)\mathrm{d}x=\int_{d_2}^{+\infty}x^2\varphi(x)\mathrm{d}x,$$

其中 $d_2=-X^T\mu/\sqrt{X^T\Sigma X}$，$X$ 满足 $X^Te=1$，d_2 的最大值在 $X^T\mu<0,X^Te=1$ 中取得。由命题3，X_2 是模型(M_5)的最优解，即 d_2 在 X_2 处取得最大值，所以 $V(S_{10},\cdots,S_{n0}|\zeta\geqslant0)$ 在 X_2 处取得最小值。证毕。

命题5 设 X_1,X_2 分别是由(9)、(10)式给出的多头、空头证券组合比例，且设收益 $\zeta=X^TR\sim N(X^T\mu,X^T\Sigma X)$。则

1)X_1 使多头证券组合盈利的概率达最大，即 X_1 使下式成立

$$P(X_1^TR\geqslant0)=\max_{X^Te=1}P(X^TR\geqslant0);$$

2)X_2 使空头证券组合盈利的概率达最大，即 X_2 使下式成立

$$P(X_2^TR<0)=\max_{X^Te=1}P(X^TR<0).$$

证明 $P(x),\varphi(x),d_1,d_2$，都是命题4证明过程中的记号，

$$1)P(X^TR\geqslant0)=\int_0^{+\infty}P(x)\mathrm{d}x=\int_{-d_1}^{+\infty}\varphi(x)\mathrm{d}x,$$

在命题 4 的证明中已得到，d_1 在 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}_1$ 处取得最大值，所以 $P(\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{R}\geqslant 0)$ 在 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}_1$ 处取得最大值；

$$2)P(\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{R}<0)=\int_{-\infty}^{0}P(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{d_2}\varphi(x)\mathrm{d}x,$$

在命题 4 的证明中已得到，d_2 在 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}_2$ 处取得最大值，所以 $P(\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{R}<0)$ 在 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}_2$ 处取得最大值。证毕。

4　结束语

本文给出基于当前价格的证券组合的总风险、多头证券组合风险和空头证券组合风险等新概念。通过使单位风险收益达最大，解出基于当前价格的多头、空头证券组合比例。在假设收益服从正态分布下，多头证券组合比例能使多头证券组合风险达最小，而收益达最大；空头证券组合比例使空头证券组合风险达最小，收益达最大。希望这些结果能给投资者提供一定帮助。

参考文献

1　Markowitz H. Portfolio selection. Journal of Finance, 1952, 7: 77～91.
2　Markowitz H. Portfolio selection: Efficient diversification of investments, New York: Wiley, 1959.
3　张尧庭. 金融市场的统计分析. 桂林：广西师范大学出版社，1998. 37.
4　C R 劳. 线性统计推断及其应用. 张　燮译. 北京：科学出版社，1987. 69.
5　张尧庭，方开泰. 多元统计分析引论. 北京：科学出版社，1982. 17.

（责任编辑：黎贞崇）

（上接第 54 页）

人类在与疾病的长期斗争中，从未放弃过努力。1796 年英国琴纳发明了接种牛痘预防天花。19 世纪中期，法国化学家巴斯德第一次用培养的炭疽杆菌菌液接种动物预防动物炭疽病，开创了疫苗预防疾病的先例，是免疫学发展史上一次飞跃，它不仅为实验免疫学奠定了基础，而且为发展生物制品开辟了广阔道路。随后霍乱疫苗、布氏菌疫苗、卡介苗、流感疫苗、百日咳疫苗等相继问世，一些严重危害人类健康的传染病不同程度上得到控制。到 20 世纪 70 年代以后，人类征服传染病的成就达到了一个前所未有的高峰，天花和脊髓灰质炎相继被消灭，乙型肝炎疫苗研制成功，不少长期猖狂一时的传染病得到有效的遏制。

今天，科学家用基因与计算机技术快速破译“非典”病毒基因，使“非典”病例刚刚出现不久就被发现了，从而为有效地控制“非典”创造了条件。最近，中国军事医学科学院与中国科学院北京基因研究所合作完成了对冠状病毒的全基因组序列测定。测序结果显示，新型冠状病毒的基因长度约为 3 万个碱基对，与加拿大、美国报告的序列基本一致。专家们认为，新型冠状病毒基因序列的测定，为寻找冠状病毒来源，研制“非典”诊断试剂、疫苗和预防治疗药物奠定了坚实的基础。香港大学医学院微生物学系主任袁国勇教授完成非典型肺炎冠状病毒的基因图谱排列，发现病毒来自动物，认为是一种由动物传给人的全新病毒。科学家从 SARS 病人血清中分离到冠状病毒后，建立了血清学诊断方法。在北京，已推出 2 种“快速检测法”：一种免疫荧光法，将感染病毒的细胞固定在小玻片上，再将被检者的血清滴在上面，如果被检者的血清中有跟病毒反应的抗体，就可以结合，然后另加一种带有荧光的试剂，可证明被检者是否感染 SARS 病毒，符合率为 98%。另一种是酶联免疫检测法，它的敏感性更高，特异性更强，符合率也在 98%以内。在香港，用 PCR 法检测“非典”病原，建立检测 SARS 相关冠状病毒核酸，该法可以从 SARS 患者尸解标本、血清中检测到冠状病毒核酸，从而确诊。

当今人类在与病魔的斗争中已处于上风，我们相信，人类依靠世代累积的预防和治疗疾病的经验，结合高度发达的科技医疗水平和雄厚的经济基础，一定能够战胜传染性非典型肺炎。

（广西壮族自治区疾病预防控制中心　主任医师　吕元聪）